生体システム工学Ｉ

次の[Ｉ－１]～[Ｉ－３]の３題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[Ｉ－１]

（問１）心臓の構造

ヒトの心臓の模式図を描き、左心室、左心房、右心室、右心房、肺動脈、大動脈の位置を矢印で示せ。付随する弁の位置と名称を記せ。さらに心臓内部における血流の方向を、動脈、静脈毎に矢印で記せ。

（問２）心臓の機能

ヒト安静時の１秒あたりの左心室拍出量Vは 93 mL とする。また、拍出時の平均血圧を 100 mmHg、１標準気圧下での水銀柱高さを 760mm とする。

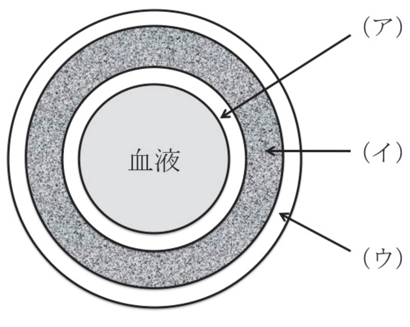
（ア）1 mmHg をパスカル(Pa)で表せ。ただし、水銀の密度を 13.6×10^3 kg/m^3、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

（イ）１標準気圧をパスカル(Pa)で表せ。

（ウ）左心室が血液を拍出する際の仕事率をワット(W)で求めよ。

（問３）血管の構造

動脈には心拍によって大きな圧力がかかるが、それに耐える構造になっている。下に示した動脈断面の概念図を見て、ヒトの血管壁を構成する３つの層状構造（ア)、(イ)、(ウ）の名前を記せ。説明のために血管壁を厚く描いているが、実際には直径に比して十分薄いと考えて良い。



動脈断面の概念図

（次のページに続く）

（問４） 血管の伸縮

平均 100 mmHg の血圧が、内径 6 mm、血管壁の厚さ 0.6 mm の円柱状の動脈に作用してつり合っている場合を考える。

（ア） 血管壁面における力のつり合いを考慮して、$Pd = 2h\sigma$ であることを導出せよ。ここで、P は血圧（Pa），d は血管内径（m），h は血管壁厚さ（m），σ は周方向応力（N/m²）である。

（イ） 平均血圧時に血管壁の周方向に作用する応力を求めよ。ただし、血管壁内の周方向応力は一様と仮定せよ。

（ウ） 血圧が 80 mmHg から 120 mmHg に準静的に変化するとき、血管の内径は何 mm 変化するか。血管壁をヤング率 1 MPa の線形弾性体として見積れ。

［Ｉ － 2］

（問１）時間 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換は次式で定義される．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

ここで，$f(t)$ を原関数，$F(s)$ を像関数という．次の関数 $f(t)$ の像関数 $F(s)$ を求めよ．

（ア）$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2e^{-3t} - 5, & 0 \leq t \end{cases}$

（イ）$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\ t \geq 1 \\ 1, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$

（ウ）$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\ t \geq 1 \\ \sin(\pi t), & 0 \leq t < 1 \end{cases}$

（問２）次の像関数 $F(s)$ の原関数を求めよ．

（ア）$F(s) = \frac{2}{s+4}$　　（イ）$F(s) = \frac{2s^2+6s+14}{s^3+9s^2+14s}$　　（ウ）$F(s) = \left(\frac{25}{s^2+25}\right)^2$

（問３）図１のように，水槽に非圧縮性の液体が流入し，排水管から流出するシステムを考える．ここでは, 水槽の断面積を a (m²), 液体の流入速度を $q_{\mathrm{i}}(t)$ (m³/s), 流出速度を $q_{\mathrm{o}}(t)$ (m³/s), 水槽内の液体の水位を $h(t)$（m）とする．流出速度 $q_{\mathrm{o}}(t)$ は，水位 $h(t)$ に比例し，b を定数として

$$q_{\mathrm{o}}(t) = bh(t)$$

が成り立つものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

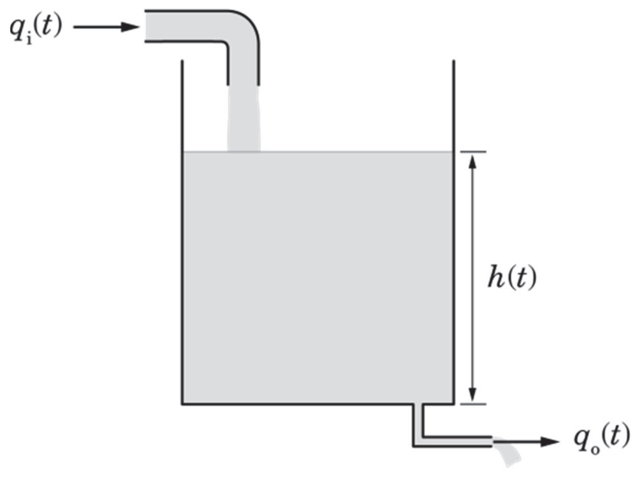


図１

（次のページに続く）

（ア）$h(t)$が従う微分方程式を書け．

（イ）$q_{\mathrm{i}}(t)$を入力，$h(t)$を出力として，このシステムの伝達関数を求めよ．ただし，$h(0)=0$とする．

（ウ）$t=0$から一定の流入速度 Q_0（m³/s）で水槽に液体を注ぎ続ける．このとき，十分に時間が経過した後の定常状態の水位 $h(t)$を求めよ．ただし，水槽は十分深く，水槽の上部から液体が溢れることはないとする．

（エ）流入速度 $q_{\mathrm{i}}(t)$ が図２のように変化するときの$h(t)$を求め，$h(t)$のグラフの概形を描け．ただし，$h(0)=0$とする．

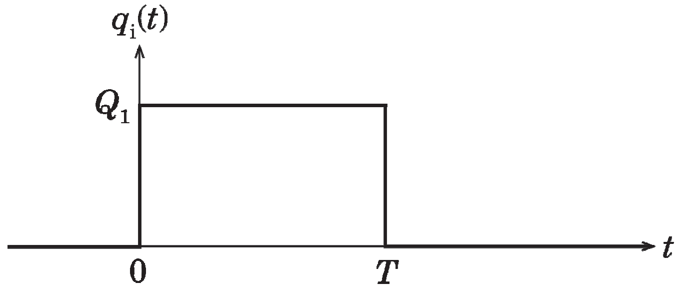


図２

［Ｉ－３］

次の２連立非線形常微分方程式で表わされる動的システムを考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left\{\mu - \left(x^2 + y^2\right)\right\} \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad x + y\left\{\mu - \left(x^2 + y^2\right)\right\} \end{cases} \qquad (1)$$

ここで，x と y は実スカラ値をとる動力学変数，t は時間を表わす独立変数，μ は実スカラ値をとるパラメータである．以下の問いに答えよ．

（問１）$x = r\cos\theta$ および $y = r\sin\theta$ とする変数変換 $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ を行う．このとき，dx/dt および dy/dt を r と θ およびこれらの微分を用いて表わせ．

（問２）問１の結果を利用して，式（１）の微分方程式を r と θ に関する微分方程式として表わせ．

（問３）問２で得られた r に関する微分方程式の平衡解，すなわち，$dr/dt = 0$ を満たす r の集合をすべて求めよ．ただし，$r \geq 0$ とする．

（問４）問２で得られた θ に関する微分方程式が意味することを簡潔に説明せよ．

（問５）$\mu > 0$ として，このシステムの（自明ではない）定常解 $(x(t), y(t))$ を時間 t の関数として表わせ．

（問６）$\mu > 0$ として，問５で求めたこのシステムの定常解は漸近安定であること，および自明な平衡解は不安定であることを，問２で求めた微分方程式を利用することにより示せ．

（問７）$\mu > 0$ として，このシステムの解の振舞いを x-y 状態平面（相平面）上に図示せよ．

（問８）パラメータ μ が負値，すなわち，$\mu < 0$ である場合，このシステムの定常解を求めよ．

（問９）問８で求めたシステムの定常解の安定性を理由と共に解答せよ．

（問１０）このシステムの定常解はパラメータ μ（正負および零も含む）に依存してどのように変化するかを詳細に説明せよ．必要なら図を用いて説明してもよい．