生体システム工学Ⅱ

次の[Ⅱ‐１]～[Ⅱ‐３]の３題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[Ⅱ‐１]

（問１）1 種類の生物個体群の動態モデルを考える．時刻 t における個体数を $x(t)$ とし，その時間発展を考える． $x(t)$ は連続量として扱ってよいものとする．まず，個体数の増加速度が現在の個体数に比例する場合を考える．

（ア）1 個体あたりの増加率を正の定数 m として，個体数の時間発展が従う微分方程式を書け．

（イ）時刻 $t=0$ での個体数を x_0 として，解 $x(t)$ を求めよ．

（問２）現実の生物個体群では，個体数がある程度まで増加すると，増加率は低下する．問１と同じく時刻 t における個体数を $x(t)$ とすると，その時間発展はロジスティック方程式と呼ばれる次の微分方程式で表現できる．

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)\left\{1-\frac{x(t)}{K}\right\} \tag{1}$$

r および K は正の定数である．

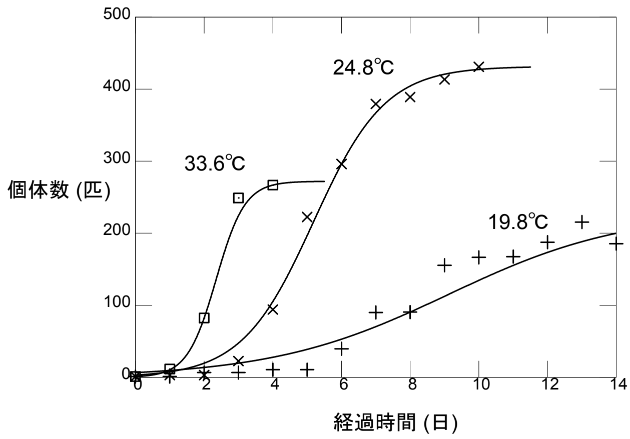
（ア）十分時間が経過したときに収束する個体数を求めよ．ただし，時刻 $t=0$ での個体数は 0 より大きいものとする．

（イ）時刻 $t=0$ での個体数を x_0 として，微分方程式(1)の解を求めよ．ただし $0<x_0<K$ とする．

（ウ）下図は，異なる水温における，タマミジンコの個体数の増殖の様子を表している．実験によって得られた個体数に対する近似曲線は，ロジスティック方程式に従って引かれている．

A)　近似曲線のパラメータ K, r, x_0 を決定する方法について述べよ．

B)　r と K の温度依存性について，下図から読み取れることを述べよ．



（次のページに続く）

（問３）2 種類の生物個体群の動態モデルを考える．時刻 t における 2 種類の生物集団の個体数を $x(t)$ および $y(t)$ とし，その時間発展を考える．$x(t)$ および $y(t)$ は連続量として扱ってよいものとする．

競争関係にある 2 種類の生物個体群の動態モデルであるロトカ・ボルテラ競争系では，個体数の時間発展は，次の微分方程式に従う．r_1, r_2, K_1, K_2, a, b はいずれも正の値をとるパラメータである．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = r_1 x(t) \left\{ 1 - \dfrac{x(t) + ay(t)}{K_1} \right\} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = r_2 y(t) \left\{ 1 - \dfrac{bx(t) + y(t)}{K_2} \right\} \end{cases} \tag{2}$$

（ア）平衡点 (x, y) の組を，パラメータの条件付きで存在するものも含めて，全て挙げよ．

（イ）前問で挙げた平衡点のうち，両種が共存しているものを (x_0, y_0) とする．(x_0, y_0) からのずれを $n_1(t) = x(t) - x_0, n_2(t) = y(t) - y_0$ とし，2 次以上の項を無視できるものとすると，$\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ が従う微分方程式は次の形に書ける．

$$\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = M\mathbf{n}(t) \tag{3}$$

2 次正方行列 M の成分を書け．

（ウ）M の固有値に基づいて，平衡点が安定となる条件について述べよ．

[II ‐ 2]

（問１） 閉じた体系において，温度が一様であり，外からは一様な圧力のみを受ける場合を考える．この体系の内部エネルギーを U，温度を T，圧力を p，体積を V，エントロピーを S で表すと，準静的な微小変化に対して，

$$dU = -p\,dV + T\,dS$$

が成り立つ．この場合，熱平衡状態を指定する独立な状態量として，VとSを考えているので，

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \boxed{\ 1\ }, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \boxed{\ 2\ }$$

がえられる．ここで，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ はSを一定とみなして，U を V で微分することを意味する．

一方，独立な状態量として，U と V を考えれば，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \boxed{\ 3\ }, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \boxed{\ 4\ }$$

がえられる．

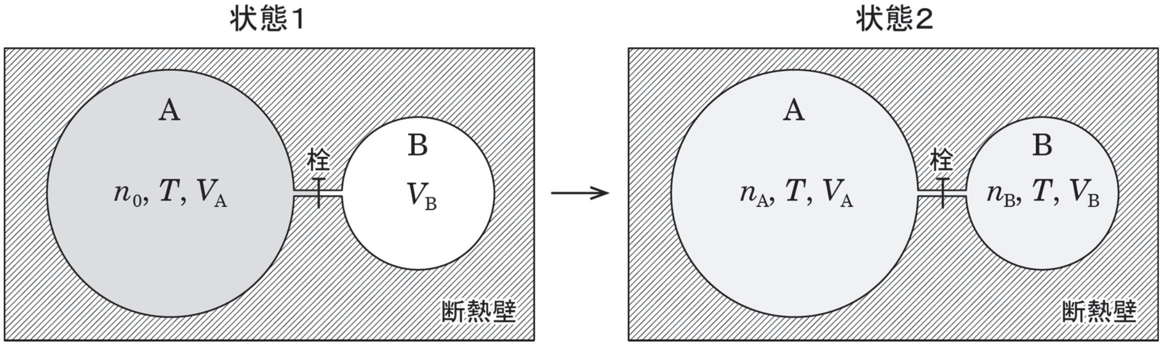
（ア） $\boxed{\ 1\ }$～$\boxed{\ 4\ }$ にあてはまる式を答えよ．

（イ） 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

（ウ）状態方程式が $p = f(V)\,T$ で与えられる気体では，内部エネルギーが体積に依存しないことを示せ．ここで，$f(V)$は体積 V の関数を表す．

（問２）図のように断熱壁で囲まれた体積 V_Aの容器 A と体積 V_Bの容器 B が，栓つきの細管で連結された体系を考える．最初の状態 1（左図）では，容器 A に温度 Tの理想気体が n_0 (mol) 入っていて，容器 B は真空である．この状態から，栓を開き，A の気体を B の中に膨張させる．このとき，気体の移動は十分にゆっくりと行われ，A，B の気体は圧力が異なるが，それぞれ熱平衡状態を保ちながら変化するものとする．この過程で気体の温度は一定で変化しない．A，B 内の圧力が等しい最終的な平衡状態に達する途中の状態２（右図）で，A，B にはそれぞれ n_A(mol)，n_B(mol)の気体があるとする．



（次のページに続く）

（ア）体系の温度が一定で変化しないとき，n (mol)の理想気体に対して，次の関係が成り立つことを示せ.

$$dS = \frac{nR}{V}dV$$

ここで，Rは気体定数である.

（イ）状態２において，$n_{\mathrm{B}} = x$とする．状態１から状態２へと変化したときの体系全体のエントロピー変化 $S_{1\to2}$を x の関数として表せ.

（ウ）この体系の最終的な平衡状態は，（イ）で求めたエントロピー変化 $S_{1\to2}$が最大の状態として実現される．$S_{1\to2}$が最大になるときに，$\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{B}}}$ となることを示せ.

（問３）ある体系がとれる微視的状態の数を Wとし，これらの微視的状態のうち j 番目の状態が実現する確率を p_jとする．このとき，k をボルツマン定数として，エントロピー S を

$$S = -k\sum_{j=1}^{W} p_j \log p_j$$

で定義する．S が最大になる$\{p_1, p_2, \cdots, p_W\}$を求め，$S$ を kと Wを使った式で表せ.

［II - 3］

線形な粗密波は，媒質中の圧力や媒質の振動が伝播する現象である．以下の問いに答えよ．なお，密度ρと音速Cは媒質中で一様とし，媒質は等方性で無限に広いとする．

（問１）波が伝播する際，媒質中の圧力$P(t,x)$と振動$v(t,x)$の間には式(1)の関係がある．密度ρと音速Cの積は何と呼ばれるかを答えよ．tは時刻，xは波の伝播方向に関する位置座標(スカラ)である．

$$P(t,x) = \rho C v(t,x) \tag{1}$$

（問２）密度ρ，音速Cである媒質中を，連続波が$+x$方向に伝播している．圧力，および，振動の振幅が各々P_0, v_0の場合，時刻t，周波数f，波長λを用いて圧力$P(t,x)$，振動$v(t,x)$を記述せよ．なお，$+x$方向を振動の正の向きとする．

（問３）周波数fと波長λの関係を記せ．

（問４）二つの波が重畳した時の圧力$P_2(t,x)$は，各々の波の圧力$P_0(t,x)$，$P_1(t,x)$を用いて式(2)で表される．また，$+x$方向に伝播する波と$\pm x$方向に伝播する波が重畳した時の振動$v_2(t,x)$は，各々の波の振動$v_0(t,x)$，$v_1(t,x)$を用いて式(3)で表される．

$$P_2(t,x) = P_0(t,x) + P_1(t,x) \tag{2}$$

$$v_2(t,x) = v_0(t,x) \pm v_1(t,x) \tag{3}$$

媒質０($x<0$，密度ρ_0，音速C_0)と媒質１($x>0$，密度ρ_1，音速C_1)が境界面($x=0$)で接している．媒質０中を$+x$方向に伝播する波が$t=0$で境界面に垂直に入射し，波の反射と透過が生じた．境界面上で，圧力と境界面方向の振動が連続であることを用いて，$x=0$における入射波圧力P_iと反射波圧力P_rの比をρ_0，C_0，ρ_1，C_1で表せ．なお，各媒質は等方性で半無限に広いとする．

（問５）生体内において，密度と音速の積が他と大きく異なる生体臓器，組織を二つ以上挙げよ．