

生体システム工学 I

次の [I - 1] ~ [I - 3] の 3 題を, それぞれ別の解答用紙に答えよ.

[I - 1]

(問 1) 次の文章の空欄 (a) から (d) に入る適切な数式を解答せよ.

一般化座標 $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ で記述される系のラグランジアンを $L(q_1(t), q_2(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t))$ とし, その作用積分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1(t), q_2(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t)) dt \quad (1)$$

を考える. ここで, t は時刻, \dot{q}_1 および \dot{q}_2 はそれぞれ q_1 および q_2 の時間微分である. さらに, この系の実際の運動からの座標のずれを $\delta q_1(t)$, $\delta q_2(t)$ として,

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta \dot{q}_2) dt \quad (2)$$

を考えると, S の第一変分 δS (式 (2) と式 (1) の差) は

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 \left(\boxed{\text{(a)}} \delta q_i + \boxed{\text{(b)}} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad (3)$$

となる. この式に $\delta \dot{q}_1(t) = \frac{d}{dt} \delta q_1(t)$ および $\delta \dot{q}_2(t) = \frac{d}{dt} \delta q_2(t)$ を代入し, 該当する項を部分積分すると,

$$\delta S = \left[\sum_{i=1}^2 \boxed{\text{(c)}} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 \left(\boxed{\text{(d)}} \right) \delta q_i dt \quad (4)$$

となる. $\delta q_1(t_0) = \delta q_1(t_1) = 0$, $\delta q_2(t_0) = \delta q_2(t_1) = 0$ であることを用いると, $\delta S = 0$ となるためには, ラグランジュの運動方程式 $\boxed{\text{(d)}} = 0$ が成り立たなければならないことがわかる.

さて, ここでは, ラグランジュの運動方程式を具体的な系に適用してみよう. 質量が m_1 と m_2 の 2 つの質点が長さ ℓ の質量の無い剛体棒で接続されている (図 1). この系の鉛直平面内の運動を考える. 質点 m_1 の位置を (x_1, y_1) , 質点 m_2 の位置を (x_2, y_2) とする. また, 重力加速度の大きさを g とする. 以下の問いに答えよ.

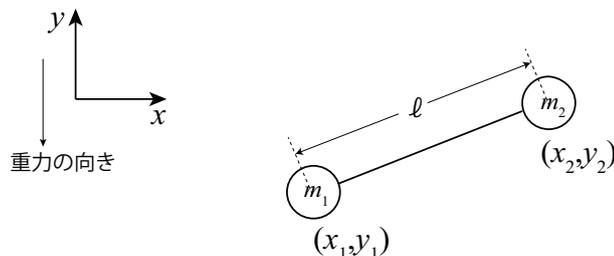


図 1 質量の無い剛体棒で接続された 2 個の質点

(問 2) この系の運動エネルギー T および位置エネルギー U を, x_1, y_1, x_2, y_2 等を用いて表せ. ただし, 2 つの質点が剛体棒で接続されているという拘束条件は考慮しないものとする.

(問 3) 2 つの質点が長さ ℓ の質量の無い剛体棒で接続されていることを表す拘束条件を, $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ の形式で書き下せ.

(問 4) 拘束条件 $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ に対する未定乗数を λ とし, 拘束条件を含めたこの系のラグランジアン $L(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2) = T - U + \lambda f$ を書き下し, ラグランジュの運動方程式を導け (拘束条件の式を含めて 5 個の方程式を導くこと).

(問 5) (問 4) で求めたラグランジュの運動方程式を用いて, 未定乗数 λ を解け. このとき, λ は $x_1, y_1, x_2, y_2, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ell, m_1$ および m_2 の全てを用いて表せ.

(問 6) 2 つの質点の位置に関する拘束条件の式を時間微分することで, 速度に関する拘束条件を導け. さらに, 得られた速度に関する拘束条件をもう一度時間微分することで, 加速度に関する拘束条件を導け.

(問 7) (問 6) の結果を用いて, (問 5) で求めた未定乗数 λ を, $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \ell, m_1$ および m_2 のみを用いて表せ ($\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2$ は消去すること). さらに, 質点 m_1 に対する拘束力 $F = (F_x, F_y)$ を求めよ.

(問 8) これ以降では, 簡単のため $m_1 = m_2 = m$ とする. 剛体棒の水平方向 (x 軸) からの傾きを θ , 2 つの質点の重心位置を (x_G, y_G) とする. 重心の並進運動の運動方程式および系の重心回りの回転の運動方程式を導け. 次に, 得られた運動方程式を, 初期状態を $(x_G(0), y_G(0)) = (0, 0), (\dot{x}_G(0), \dot{y}_G(0)) = (v_0, 0), \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \omega_0$ として解け. さらに,

$$x_1 = x_G - \frac{\ell}{2} \cos \theta, \quad y_1 = y_G - \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (5)$$

$$x_2 = x_G + \frac{\ell}{2} \cos \theta, \quad y_2 = y_G + \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (6)$$

を考慮に入れ, さらに $|\omega_0 \ell|$ の値が $|v_0|$ の値よりも相当に大きいものとして, この系の運動の様子 (重心および 2 つの質点のうちのどちらか一方の質点の運動軌道の概形) を x - y 平面上に図示せよ.

(問 9) (問 8) で求めた運動方程式の解を利用して, (問 7) で求めた拘束力を v_0 と ω_0 および t を用いて表せ. また, この拘束力がどのような力を表すかを考察し, 簡潔に記せ.

[I - 2]

$100_{(N)}$ は, N 進数の 100 を表す.

(問 1) 以下の問いに答えよ.

(ア) 次の 10 進数を 2 進数で表せ.

- (a) $15_{(10)}$ (b) $0.25_{(10)}$ (c) $2^5_{(10)}$

(イ) 次の 2 進数を 10 進数で表せ.

- (a) $10100010010_{(2)}$ (b) $1001.1_{(2)}$

(ウ) $3_{(10)}$ と $2_{(10)}$ をそれぞれ 3 bit の 2 進数で表し, それらの加算を 2 進数の筆算で計算せよ.

(エ) $606_{(10)}$ と $223_{(10)}$ をそれぞれ 16 bit の 2 進数で表し, それらの減算, つまり $606_{(10)} - 223_{(10)}$ の計算において, 引く数 ($223_{(10)}$) の 2 の補数の加算によって筆算で計算せよ.

(問 2) x, y を 0 または 1 のいずれかの値をもつ 2 値変数とする. 表 1 は基本的な論理演算である論理積 (AND), 論理和 (OR), 論理否定 (NOT) の真理値表 (入力変数 x, y の値に対する出力の値をまとめた表) である. これらの演算を行う論理ゲート, つまり AND ゲート, OR ゲート, NOT ゲートはそれぞれ図 1 (a), (b), (c) のように表される. また, 論理式 $x + x \cdot \bar{y}$ を表す論理回路は, 図 1 (d) のように表される.

表 1 基本的な論理演算の真理値表

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1

x	\bar{x}
0	1
1	0

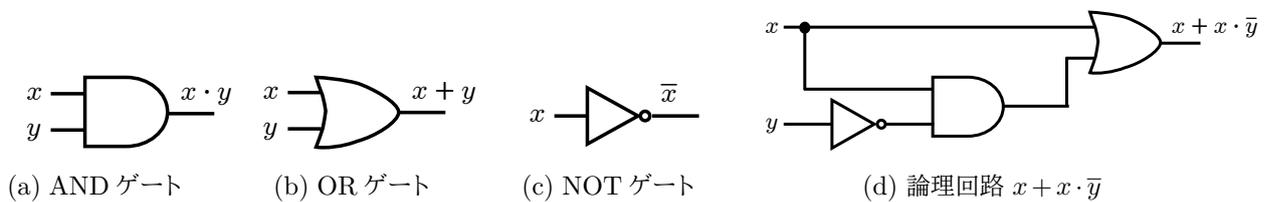


図 1 論理回路

(ア) 半加算回路では, 2 値変数 x, y を入力としたとき, 和 $S = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$, 桁上げ $C_+ = x \cdot y$ を出力する. 半加算回路を AND ゲート, OR ゲート, NOT ゲートを用いて図示せよ.

- (イ) 図 2 (a) に示す全加算回路 (FA) では, 2 値変数である x, y および下位の桁からの桁上げ C を入力としたとき, 和 $S = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot C + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{C} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{C} + x \cdot y \cdot C$, 桁上げ $C_+ = x \cdot y + x \cdot C + y \cdot C$ を出力する. 図 2 (b) は, 3 bit を加算する並列加算回路を示す. $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ を 2 値変数とする. 3 bit の足される数 $x_2x_1x_0_{(2)}$, 足す数 $y_2y_1y_0_{(2)}$ および 2 値変数 C_{-1} を入力としたとき, それぞれの全加算回路は和 S_0, S_1, S_2 , 桁上げ C_0, C_1, C_2 を出力する. この並列加算回路を用いて $3_{(10)}$ に $2_{(10)}$ を加算する場合における S_0, S_1, S_2 の値を答えよ. ただし, $C_{-1} = 0$ とする.
- (ウ) y_0, y_1, y_2 の代わりにそれらの論理否定 $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ を入力し, $C_{-1} = 1$ とした場合の演算結果について考察せよ.

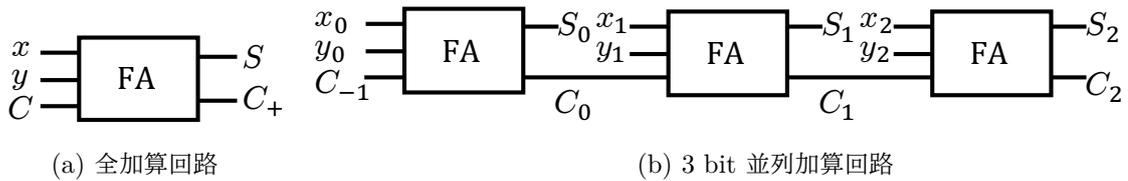


図 2 加算回路

[I - 3]

X 線 CT (X-ray Computed Tomography) スキャナは, 対象とする物体に, 様々な方向から X 線を照射し, その透過像の集合から, 物体の断層像を再構成する装置である. ここでは, X 線 CT の数学モデルを考える. 簡単のため, 図 1 (A) の概念図のように, 点状の X 線発生源が直線上に密に配列されており, 各点源から, X 線発生源が配列された直線と垂直な方向に, 強度 I_{in} の X 線が照射されるとする (平行照射). 物体を透過した出力 X 線は, X 線発生源が配列された直線と平行な直線上に配列され, 各 X 線発生源と 1 対 1 に対応する X 線検出器によって検出される. こうして, 検出器が配列された直線に沿った出力 X 線の強度 I_{out} の 1 次元分布が得られる. このとき, 個々の出力 X 線の強度はその X 線の通過経路に沿った物体の X 線減衰係数の空間分布に依存して決まる. すなわち, 減衰係数が大きい部分を通過した出力 X 線の強度は低くなる. X 線発生源を回転することで, 様々な X 線照射角度に対して出力 X 線強度の 1 次元分布を得ることができる. ここでは, 図 1 (A) および (B) に示すように, X 線が照射される平面による断面が円形 (装置の回転中心を原点とする単位円) である物体を考え, その断面内の任意の点の位置を $\mathbf{x} = (x, y)$, 点 \mathbf{x} における X 線減衰係数を $\lambda(x, y)$ とする. すなわち, $\lambda(x, y)$ は減衰係数の x - y 平面上における空間分布を表し, 出力 X 線強度の 1 次元分布は, $\lambda(x, y)$ によって決まる. 様々な X 線照射角度に対する出力 X 線強度の 1 次元分布から, $\lambda(x, y)$ を計算 (推定) したものが, 物体の X 線 CT 断層像である.

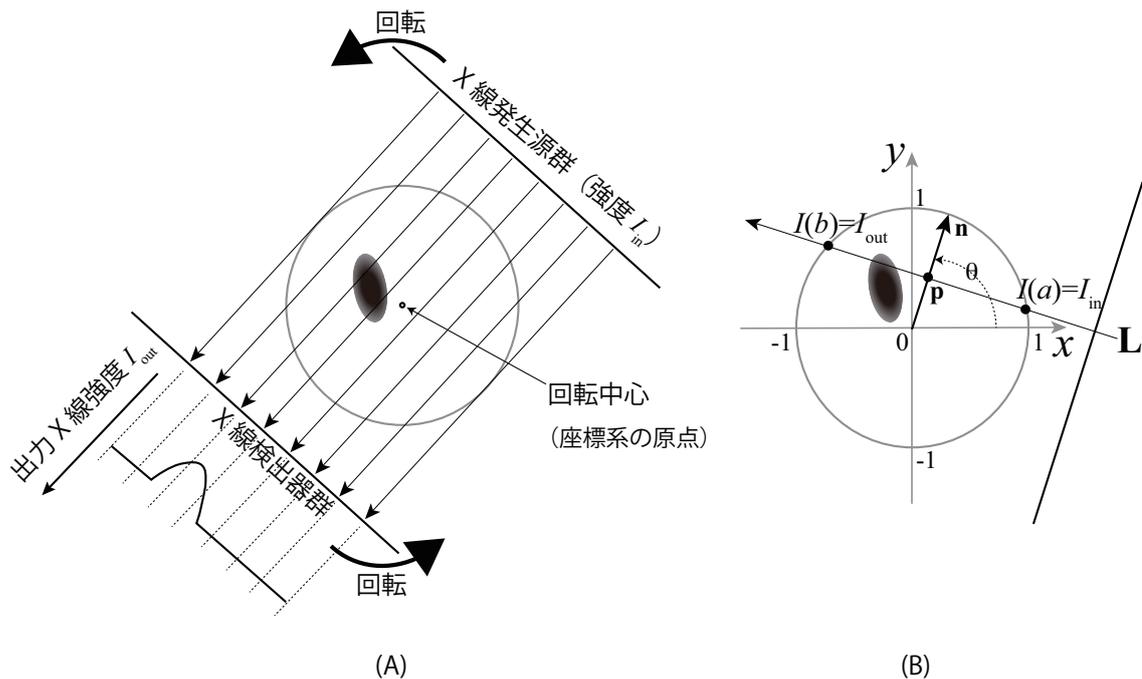


図 1 (A) X 線を平行照射する CT スキャナ の概念図 (モデル). 円形物体の内部で黒く塗られた部分は X 線減衰係数の値が大きく, 白い部分は 0 である. (B) X 線の通過経路 \mathbf{L} の幾何学的定義.

さて, 図 1 (B) のように, ある X 線の通過経路を表す直線 \mathbf{L} 上の点を, その経路上の距離を表すパラメータ s を用いて $(x(s), y(s))$ と表す. ここで $a \leq s \leq b$ で, $(x(a), y(a))$ および $(x(b), y(b))$ は, それぞれ, 直線 \mathbf{L} と円形物体の境界との交点である. 直線 \mathbf{L} に沿った X 線の強度を $I(s)$ とすると, 物体の外側では X 線の強度は減衰しないので, $I(a) = I_{in}$, $I(b) = I_{out}$ となる. I_{in} の値は装置によって決まる既知の定数である. また, I_{out} の値は, \mathbf{L} を通過経路とする X 線を受光する検出器によって得られる.

図 1 (B) に示すように, 直線 \mathbf{L} と直交する単位ベクトルを \mathbf{n} とする. また, \mathbf{n} に直交し, X 線の入力側から出力側

に向かう直線 L 上の単位ベクトル (直線 L の方向ベクトル) を \mathbf{n}^\perp とする. このとき, 単位ベクトル \mathbf{n} の向きは, 外積 $\mathbf{n} \times \mathbf{n}^\perp$ が, 紙面から手前に向かうように定義するものとする. \mathbf{n} が図の x 軸となす角を θ とする. θ は $[0, \pi]$ の範囲の値を取り, X 線照射角度 (より正確には照射 X 線の法線ベクトルの角度) を表す. このとき, $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ となる. \mathbf{n} を方向ベクトルとする直線と直線 L の交点を \mathbf{p} とする. 点 \mathbf{p} は, スカラ値 r を用いて $\mathbf{p} = r\mathbf{n}$ と表せる. このとき, 原点から点 \mathbf{p} までの距離は $|r|$ となる. 直線 L と原点の位置関係, および X 線の照射方向 (\mathbf{n}^\perp の向き) に依存して, r は正負両方の値をとり得る. ここでは, r を直線 L のオフセットと呼ぶことにする. また, 直線 L 上の点 $(x(s), y(s))$ は, $\mathbf{p} + s\mathbf{n}^\perp$ と書ける.

(問 1) X 線の照射角度が θ で, オフセットが r であるような直線 L 上の点を (x, y) とする. x および y を, それぞれ, θ, r , および s を用いて表せ.

(問 2) 直線 L 上で微小距離 Δs だけ離れた 2 点である $(x(s), y(s))$ と $(x(s + \Delta s), y(s + \Delta s))$ における X 線強度を, それぞれ, $I(s)$ と $I(s + \Delta s)$ とする. 減衰係数 $\lambda(x(s), y(s))$ は, 強度 $I(s)$ の X 線が $(x(s), y(s))$ から直線 L に沿って単位距離だけ進んだとき, その強度が $\lambda(x(s), y(s))I(s)$ だけ減衰することを表している. $I(s + \Delta s)$ を $I(s)$ と $\lambda(x(s), y(s))$ を用いて表せ. また, 得られた結果を用いて, $I(s)$ が満たすべき微分方程式を求めよ. さらに,

$$\int_a^b \lambda(x(s), y(s)) ds \quad (1)$$

の値を I_{in} と I_{out} を用いて表せ. 尚, 式 (1) の積分は $\lambda(x(s), y(s))$ のラドン変換と呼ばれる.

(問 3) 式 (1) のラドン変換の値は, 直線 L の傾き (X 線の照射角度 θ) およびそのオフセット r の値に依存する. そこで, ラドン変換の値を θ と r の関数として, $D(\theta, r)$ と記すことにする. 図 1 (B) を参考にして, 式 (1) は,

$$D(\theta, r) = \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \lambda(x(\theta, r, s), y(\theta, r, s)) ds \quad (2)$$

と書き改められることを示せ. ここで, $x(\theta, r, s)$ と $y(\theta, r, s)$ は, (問 1) の結果であり, 直線 L 上の点 (x, y) を θ, r , および s を用いて表したものである.

これ以降では、対象とする円形物体が、その内部の 1 点 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ のみで、デルタ関数的な減衰係数を持ち、点 \mathbf{x}_0 以外では、X 線強度の減衰は生じないものとする。すなわち、減衰係数の空間分布が

$$\lambda(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (3)$$

である場合を考える。ここで、 $\delta(x, y)$ は、形式的な 2 次元デルタ関数で、 α および β を傾きにもつ原点を通る直線 A ($y = \alpha x$) および直線 B ($x = \beta y$) としたとき、直線 A および B に沿った線積分のそれぞれに対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s, \alpha s) ds = 1 \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta s, s) ds = 1 \quad (4)$$

が成り立つものとする。

(問 4) 減衰係数の空間分布が式 (3) で与えられるとき、式 (2) のラドン変換を計算せよ。さらに、 $x_0 = 1, y_0 = 0$ として、得られた $D(\theta, r)$ を r - θ 平面上に図示せよ (この図をサイノグラムと呼ぶ)。

(問 5) $x_0 = 1, y_0 = 0$ にデルタ関数的な減衰係数が存在する物体を置いたときの出力 X 線強度の 1 次元分布を θ が $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$, および π である場合のそれぞれに対して、図 1 (A) と同様の形式で図示せよ。このとき、各図において、X 線の減衰が発生する特定の直線 \mathbf{L} と、その直線のオフセットを明示せよ。さらに、上記 4 つの θ に加え、様々な θ に対する出力 X 線強度の 1 次元分布が得られた場合、それらの集合から、(問 4) で描いたサイノグラムが構成できることを図や数式、あるいは文章を用いて説明せよ。

(問 6) x - y 平面上の任意の点 (x, y) に対して、その点を通る全ての直線 \mathbf{L} に関して (X 線照射角度のとり得る値全体に渡って) ラドン変換 $D(\theta, r)$ を積分した値 $\tilde{\lambda}(x, y)$ は次式で定義される。

$$\tilde{\lambda}(x, y) = \int_0^\pi D(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (5)$$

これは、 $D(\theta, r)$ のバックプロジェクションと呼ばれ、CT 断層像に対応する。(問 4) で図示した $D(\theta, r)$ のバックプロジェクションを計算する過程を説明し、その結果として得られる CT 断層像を x - y 平面上に図示せよ。