生体システム工学 II

次の [II - 1]～[II - 3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[II - 1]

図 1 に示すように，xyz 座標の原点 O に中心を持つ半径 r_0 の球 S_0 を $x = x_P$ で表される平面 P $(0 < x_P < r_0)$ で切った球冠 S を考える．θ は 図 1 (a) のように S_0 と P で一意に決まる角度である．以下の問いに答えよ．

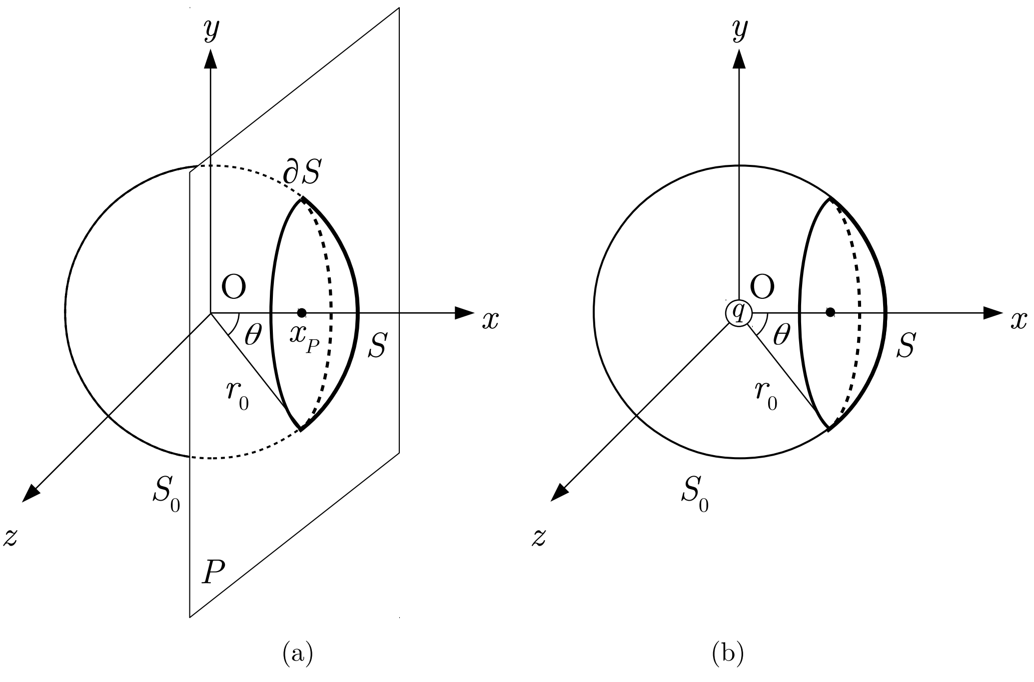

図 1

(問 1)　S の面積とその周囲 ∂S の長さを，r_0 と θ を用いて表せ．

(問 2)　真空中において，図 1 (b) に示すように正に帯電した点電荷 (真電荷) q が時間 $t = 0$ で O に存在する場合，q に伴い発生する電束密度を S_0 表面，ならびに，S で面積分した値を計算せよ．

(次のページに続く)

([II - 1] のつづき)

図 2 (a) に示すように q が一定速度 $\mathbf{v}$ で $+x$ 方向に移動しており，図 2 (b) の O から 点 A までの距離 Δx 進んだとする．O と S 上の任意の点 B を結ぶ直線と A と B を結ぶ直線が作る角度を $\Delta\theta$ とし，Δx は r_0 と比べると十分小さく $\Delta\theta \simeq 0$ が成り立つとする．

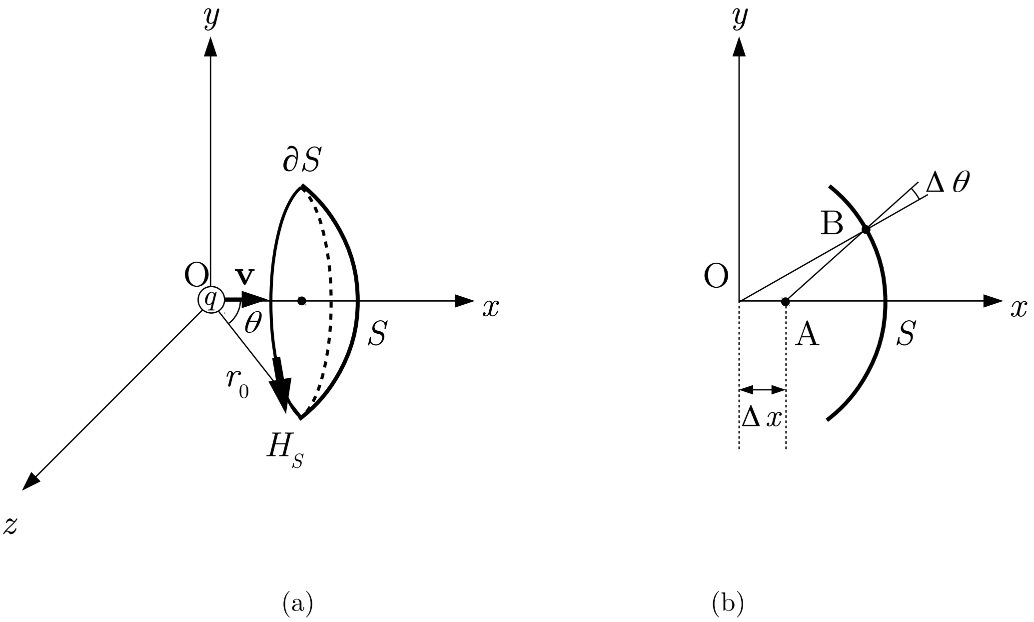

図 2

(問 3)　q が O - A 間に存在する時，電束密度の S での面積分値を時間で偏微分せよ．但し，式 (1) が成り立つとする．

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \simeq \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{r_0} \tag{1}$$

(問 4)　q の移動に伴い発生する磁界は x 軸対称となり，図 2 (a) に示すように，∂S 上では接線成分のみ有し，その大きさを H_S とする．∂S で磁界を周回積分した結果を，r_0，H_S，θ を用いて表現せよ．

(問 5)　伝導電流密度 $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ としてマクスウェル・アンペール方程式を S に適用し，H_S と q の関係を求めよ．

[II - 2]

図 1 (a) に示すように，十分長い一次元平行伝送線上の接近した二点 P，Q，ならびに，P’，Q’ を考え，P，P’ の座標を x，Q，Q’ の座標を $x+\Delta x$ とする．図 1 (b) はこの区間の等価回路であり，R，L は，各々，伝送線の単位長あたりの抵抗 (Ω/m)，単位長あたりのインダクタンス (H/m)，G，C は，各々，伝送線間の単位長あたりの漏れコンダクタンス (S/m)，単位長あたりの静電容量 (F/m) である．P - P’ 間，Q - Q’ 間の電位差を，各々，$v(x,t)$，$v(x+\Delta x,t)$，P，Q における電流を，各々，$i(x,t)$，$i(x+\Delta x,t)$ とする．t は時間である．以下の問いに答えよ．

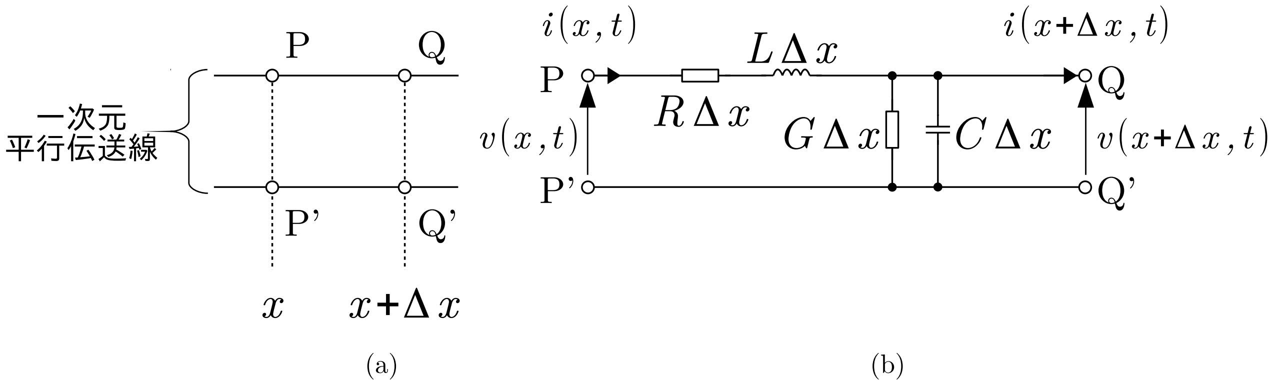

図 1

(問 1)　$v(x,t)-v(x+\Delta x,t)$ を $i(x,t)$，R，L を用いて表わせ．

(問 2)　$i(x,t)-i(x+\Delta x,t)$ を $v(x+\Delta x,t)$，G，C を用いて表わせ．

(問 3)　(問 1)，(問 2) で求めた式より，$v(x,t)$，および，$i(x,t)$ の一階空間微分を求めよ．

(問 4)　(問 3) の結果より，$v(x,t)$ の二階空間微分を $v(x,t)$，ならびに，$v(x,t)$ の時間微分を用いて表わせ．

(問 5)　(問 4) で導出した式において，$R=G=0$ とした時の方程式を書き下せ．また，この方程式は何と呼ばれるかを答えよ．

(問 6)　$v(x,t)=V(x)\exp(j\omega t)$ として ($j^2=-1$，ω: 角周波数)，(問 5) の結果を $V(x)$ が従う常微分方程式に書き直せ．

(問 7)　式 (1)，(2) の条件で，(問 6) で導出した方程式を解け．

$$V(0)=V_0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}V(0)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2}$$

[II - 3]

図 1 (a) のように，真空中の x-z 平面内を伝播する理想的な単色光の平面波を考える．このとき，光波の電場は複素数表現を用いて，

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp\{j(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \phi)\} \tag{1}$$

と表される．ここで，E_0 は振幅，$\mathbf{r} = (x, z)$ は位置ベクトル，t は時間，$\mathbf{k}$ は波数ベクトル，ϕ は $t = 0$ のときの原点 O における位相，j は虚数単位であり，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ は $\mathbf{k}$ と $\mathbf{r}$ の内積を表す．単色光の角周波数を ω，真空中の光の速さを c とすると，光の波数ベクトル $\mathbf{k}$ の向きは光波の伝播方向と一致し，大きさは $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ である．以下の問いに答えよ．

(問 1)　図 1 (b) のように z 軸の負の方向に伝播する振幅 E_0，角周波数 ω の単色光の平面波を考える．

(ア) 複素数表現を用いて z 軸上の電場 $E(z, t)$ を表せ．ここでは，$(z, t) = (0, 0)$ における位相を 0 とする．
(イ) 同位相面が移動する速度 (位相速度) を求めよ．

(問 2)　a を定数とする．波長 λ の光波において同位相面が $x + \sqrt{3}z = a$ で与えられるとき，波数ベクトル $\mathbf{k}$ を求めよ．

(問 3)　振幅 E_0 が等しく角周波数がわずかに異なる 2 つの単色光の平面波が，同じ向きに伝播し合成波となる場合を考える．これらの光波は z 軸方向に伝播し，波数の大きさをそれぞれ k_1，k_2，角周波数をそれぞれ ω_1，ω_2 とする．また，2 つの光波の位相を，$(z, t) = (0, 0)$ において，ともに 0 とする．さらに，$\overline{k}$，$\overline{\omega}$，Δk，$\Delta\omega$ を次のように定義する．

$$\overline{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

(ア) 合成波の電場が

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k z) \exp\left\{j\left(\overline{\omega} t - \overline{k} z\right)\right\}$$

となることを示せ．
(イ) (ア) の結果は，z 軸上の各点において時間とともに電場の振幅が変調する，うなりが発生することを意味している．このうなりの周波数を求めよ．
(ウ) うなりが伝わる速度 (群速度) を求めよ．

(問 4)　波長 λ の単色光を 2 つの平行光に分け，その後，図 1 (c) のように，z 軸と $\pm\theta$ の角度で入射させる．$z = 0$ の直線 (x 軸) 上にスクリーンを設置するとき，そこに見られる干渉縞について考える．

(ア) 2 つの光波の振幅を，それぞれ，E_1，E_2 とするとき，$z = 0$ の直線 (x 軸) 上の電場 $E(x, t)$ を，複素数表現を用いて表せ．ここでは，$t = 0$ のとき，原点 O における 2 つの光波の位相を，それぞれ，ϕ_1，ϕ_2 とする．
(イ) 光波の電場の複素数表現 $E(\mathbf{r}, t)$ が与えられたとき，その強度は，$|E(\mathbf{r}, t)|^2$ に比例する．$z = 0$ の直線上において，$|E(x, t)|^2$ を計算することで，スクリーンに現れる干渉縞の間隔を求めよ．

(問 5)　レーザ光のドップラー効果を利用した血流速度の計測原理を考える．以下では，レーザ光を周波数 f_0 の単色光として考える．図 2 に示したように，半透鏡により，2 つの光路に分けられたレーザ光が，レンズにより測定面上で交差するように光学系を構成する．ここでは，測定面に対するレーザの入射角を θ とする．このとき，測定面上に速さ v で移動する粒子がある場合には，光路 1，光路 2 を通り，粒子により散乱されたレーザ光の周波数は，ドップ

(次のページに続く)

([II - 3] のつづき)

ラーシフトにより，それぞれ，

$$f_1 = f_0 + \Delta f \tag{2}$$
$$f_2 = f_0 - \Delta f \tag{3}$$

となる．ここで，Δf はドップラー周波数と呼ばれ，

$$\Delta f = \frac{f \sin\theta}{\tilde{c}}\ v \tag{4}$$

で与えられる．ここで，$\tilde{c}$ は，測定空間の光の速さである．光検出器で，散乱された 2 波を合成し，光の強度を電気信号に変換することにより，血流の速さ v が計測できることを説明せよ．

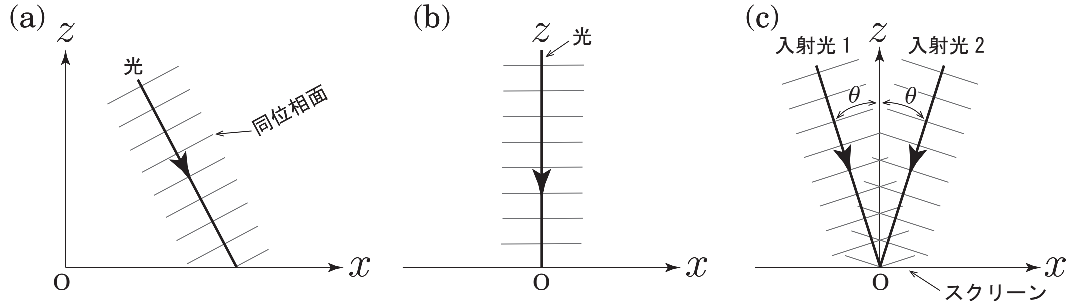

図 1　x-z 平面内を伝播する平面波の模式図

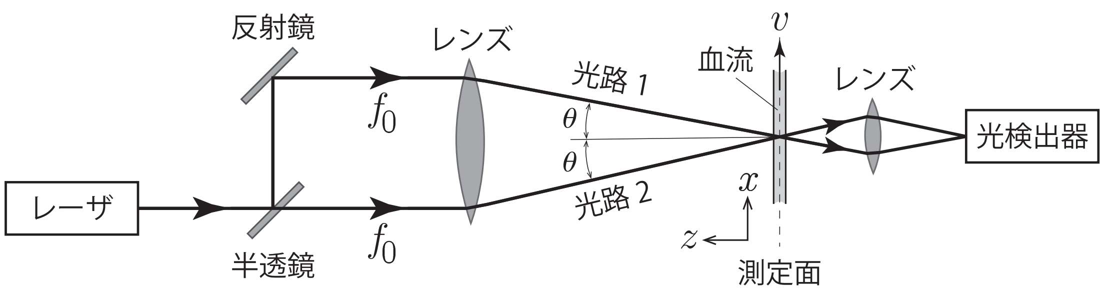

図 2　差動形レーザドップラー速度計の基本構成