生体システム工学Ｉ

次の［Ｉ- １］〜［Ｉ- ３］の３題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

［Ｉ- １］

一軸回転軸周りに振動する剛体振子の運動とその安定性を考える．ここで，回転軸周りの振子の慣性モーメントを J，質量を m，振子の質量中心と回転軸の距離を h，振子の回転軸と質量中心を結ぶ直線と鉛直下向き方向が成す角度を θ とする．また，回転軸には回転運動に抗する摩擦トルクが作用し，それは角速度に比例するものとする（比例定数を $\mu > 0$ とする）．また，重力加速度の大きさを g とする．θ は微小とは限らないことに注意して，以下の問に答えよ．

（問１）振子の運動方程式を書き下せ．

（問２）時刻 t における系の状態ベクトル $\vec{x}(t)$ を以下のように定義する．

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

ここで，$\dot{\theta}(t)$ は $\theta(t)$ の時間微分を表す．このとき，系の運動エネルギー E および位置エネルギー U を，$x_1(t)$，$x_2(t)$，および系のパラメータを用いて表せ．なお，位置エネルギーは振子が鉛直下向きのときに零とする．

（問３）問１で求めた運動方程式を状態空間表現すると，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{(a)}} \\ \boxed{\text{(b)}} \end{pmatrix}$$

空欄 (a) と空欄 (b) に入る数式を解答せよ．

（問４）系の状態が $\vec{x}(t)$ であるときの系の全エネルギー V は

$$V(\vec{x}(t)) = E + U$$

である．このとき $V(\vec{0}) = 0$ で，任意の $\vec{x}(t) \neq \vec{0}$ に対して $V(\vec{x}(t)) > 0$，すなわち $V(\vec{x}(t))$ は非負定値関数であることを示せ．さらに，$V(\vec{x}(t))$ は時間の経過に対して単調非増加関数，すなわち

$$\frac{d}{dt}V(\vec{x}(t)) \leq 0$$

であることを示せ．

（問５）問４の結果から，$\vec{x}(t) = \vec{0}$ の安定性について分かることをその理由と共に簡潔に述べよ．

(次のページに続く)

これ以降では，上記の解析を任意の時不変動的線形システム

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{1}$$

に一般化することを考える．ここで，$\vec{x}$ は n 次元状態ベクトル，A は $n \times n$ のシステム行列である．まず，P を時間によらない $n \times n$ 正定値対称行列とし，上述の関数 V に対応すると予想される関数として，

$$\phi(\vec{x}(t)) = \vec{x}^T(t)P\vec{x}(t)$$

を考える．ここで，ベクトルおよび行列の上付き添字 T は転置を表す．また，$P = P^T$ で，かつ，任意の 非零 n 次元実ベクトル $\vec{x}$ に対して，$\vec{x}^T P\vec{x} > 0$ を満たすとき，P は正定値対称行列であるという．

（問 6）関数 $\phi(x(t))$ の時間微分は，

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = x^T(t)Qx(t)$$

と表せる．行列 Q を A と P を用いて表せ．

（問 7）問 6 で求めた Q は，対称行列であることを示せ．また，式 (1) のシステムが漸近安定であるために Q が満たすべき条件を求めよ．

（問 8）

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ の安定性を判定したい．そのために，

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を考える．この Q は負定値対称行列，すなわち，$Q = Q^T$ で，かつ，任意の非零 2 次元ベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して，$\vec{x}^T Q\vec{x} < 0$ であることは明らかである．この Q に対して，問 6 で求めた関係式を満たす正定値対称行列 P を求めよ．なお，そのような P が存在すれば，システムは漸近安定であることが示される．

［Ｉ-　２］

以下の問いに答えよ．t，ω は，各々，時間，角周波数を表す実数，n は整数，$j^2 = -1$ である．

（問１）$\delta(t)$ を単位インパルス関数 (ディラックの δ 関数) とする．また，$h(t)$ を式 (1) のような周期が T_s であるインパルス列関数とする．T_s は正の実数である．

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \tag{1}$$

$h(t)$ は周期関数であるため，式 (2) のようにフーリエ級数展開することができる．式 (3) のフーリエ係数 c_n を求めよ．

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j\frac{2\pi n}{T_s}t\right) \tag{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} h(t)\exp\left(-j\frac{2\pi n}{T_s}t\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

（問２）問１の フーリエ級数 $h(t)$ を，式 (4) のようにフーリエ変換した $H(\omega)$ を計算せよ．

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j\omega t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

（問３）実関数 $f(t)$ と $h(t)$ の積は $f(t)$ を周期 T_s で標本化した関数であり，$g(t) = f(t)h(t)$ とする．$f(t)$，$g(t)$ のフーリエ変換 を，各々，$F(\omega)$，$G(\omega)$ とする．この時，式 (4) を利用して，$G(\omega)$ が $F(\omega)$ と $H(\omega)$ の畳み込みになることを導出せよ．また，$f(t) = \cos\dfrac{\pi}{5T_s}t$ と $f(t) = \cos\dfrac{3\pi}{T_s}t$ の二つの場合を考え，各々に対する $g(t)$ のフーリエ変換を図示せよ．このとき，単位インパルス関数は形式的に高さが１のインパルスとして描くこととする．

（問４）任意の実関数 $f(t)$ を T_s で標本化する場合，折り返し現象が生じないための $F(\omega)$ の条件を答えよ．

[I - 3]

表面電極を用いた筋電図計測では，身体の皮膚表面に被検筋の長軸に沿うように２つの円盤状電極を配置し，両電極間の電位差を計測する（図 1(a)）．この時，両電極間の電位差は微小である．また電極の電位には商用電源や電極に接続しているケーブルの揺動に由来する雑音が混入する．これらの雑音を除去し，微弱な電位変化を増幅するための生体計測アンプが必要である．

ここでは，生体計測アンプを構成する回路として，図 1(b) から (d) の３種類の回路を考える．ただし，回路に含まれるオペアンプは理想的である．また，オペアンプに対する正電源および負電源は省略している．それぞれの回路では GND を基準（0 V）とする．以下の問いに答えよ．

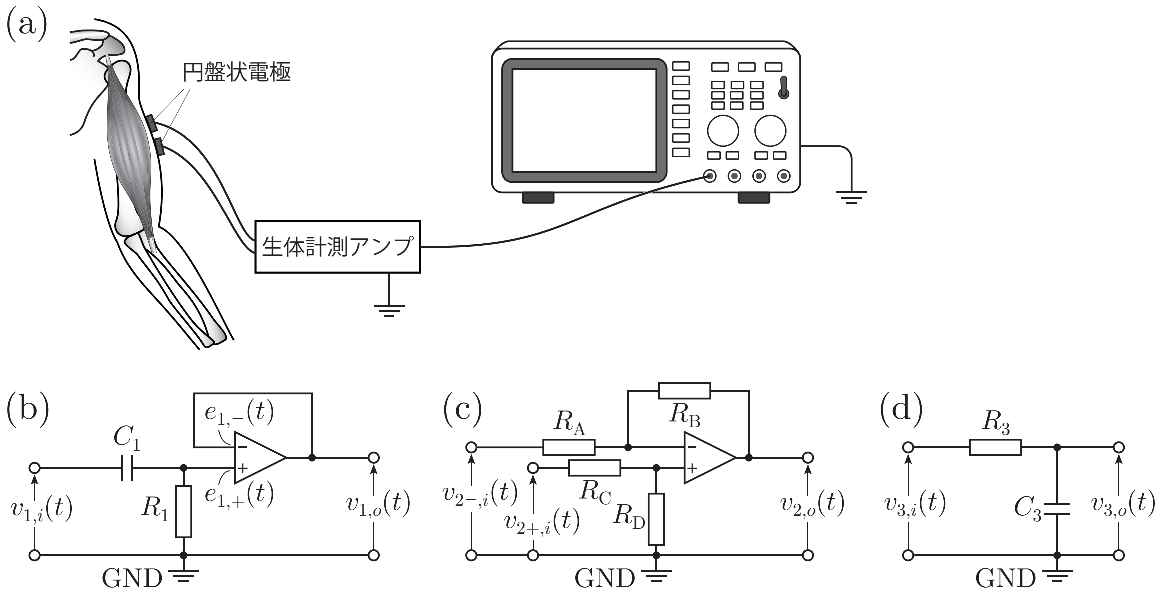

図 1: (a) 表面筋電計を用いた筋電図計測の様子．(b)-(d) 生体計測アンプを構成する回路．

（問 1）図 1(b) の回路について考える．入力電圧を $v_{1,i}(t)$，非反転入力端子の電圧を $e_{1,+}(t)$ とする．回路を構成するコンデンサの電気容量を C_1，抵抗の抵抗値を R_1 とする．時刻 $t=0$ において，コンデンサの電荷は零であった．時刻 t（>0）における $v_{1,i}(t)$ を $e_{1,+}(t)$，C_1，および R_1 を用いて表せ．

（問 2）図 1(b) の回路で，出力電圧を $v_{1,o}(t)$，反転入力端子の電圧を $e_{1,-}(t)$ とする．$v_{1,o}(t)=e_{1,-}(t)$ である．理想的なオペアンプを使用しているため，仮想短絡（$e_{1,+}(t)=e_{1,-}(t)$）が成立する．入力電圧 $v_{1,i}(t)$ を出力電圧 $v_{1,o}(t)$，C_1，および R_1 を用いて表せ．

（問 3）図 1(b) の回路で，入力 $v_{1,i}(t)$ と出力 $v_{1,o}(t)$ の伝達関数を求め，入出力比の絶対値の周波数特性の概形を両対数グラフで図示せよ．また，この回路の役割を述べよ．

(次のページに続く)

（問 4）図 1(c) の回路について考える．入力電圧を $v_{2-,i}(t)$ および $v_{2+,i}(t)$，出力電圧を $v_{2,o}(t)$ とする．回路を構成する抵抗の抵抗値を，図のように R_{A}，R_{B}，R_{C}，および R_{D} とする．$v_{2,o}(t)$ を，$v_{2-,i}(t)$，$v_{2+,i}(t)$，R_{A}，R_{B}，R_{C}，および R_{D} を用いて表せ．

（問 5）図 1(c) の回路で，以下の関係が成り立つとする．

$$R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{C}}, \qquad R_{\mathrm{B}} = R_{\mathrm{D}} = 100R_{\mathrm{A}}.$$

入力電圧が $v_{2+,i}(t) = \sin(120\pi t) + \sin(200\pi t + \theta)$，$v_{2-,i}(t) = \sin(120\pi t) + \sin(200\pi t)$ であるとする．ここで θ は零でない定数とする．この時の $v_{2,o}(t)$ を求めよ．また，図 1(c) の回路の役割を述べよ．

（問 6）図 1(d) の回路について考える．入力電圧を $v_{3,i}(t)$，出力電圧を $v_{3,o}(t)$ とする．回路を構成する抵抗の抵抗値を R_3，コンデンサの電気容量を C_3 とする．回路の伝達関数を求め，入出力比の絶対値の周波数特性の概形を両対数グラフで図示せよ．また，この回路の役割を述べよ．

（問 7）図 1(b)-(d) の回路を組み合わせた生体計測アンプを考える（図 2）．この生体計測アンプを構成する抵抗の抵抗値およびコンデンサの電気容量を表 1 に示す．$v_{\mathrm{A}}(t)$ と $v_{\mathrm{B}}(t)$ の電位差 $v_i(t)$（$= v_{\mathrm{B}}(t) - v_{\mathrm{A}}(t)$）を入力，電位 $v_o(t)$ を出力とする．この生体計測アンプの入出力比の絶対値の周波数特性の概形を両対数グラフで図示せよ．

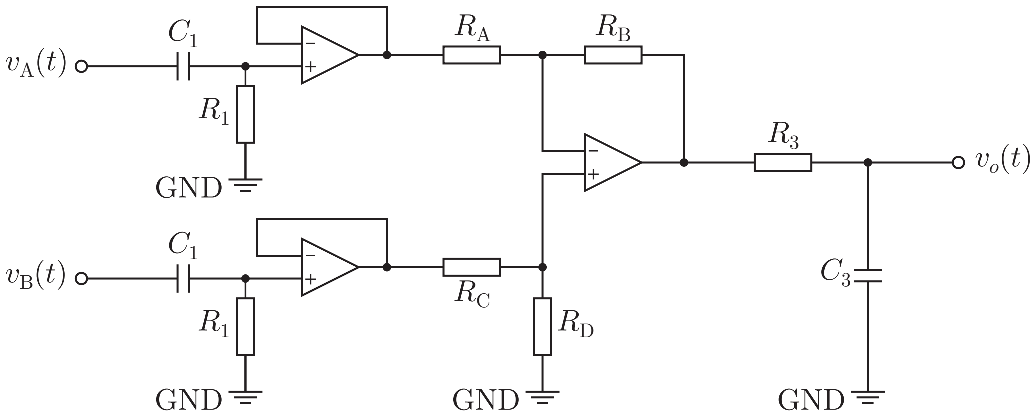

図 2: 図 1(b)-(d) の回路を組み合わせて構築した生体計測アンプ．

表 1: 生体計測アンプ（図 2）を構成する抵抗の抵抗値およびコンデンサの電気容量．

R_1	R_{A}	R_{B}	R_{C}	R_{D}	R_3	C_1	C_3
10 MΩ	5 kΩ	500 kΩ	5 kΩ	500 kΩ	5 kΩ	1 nF	20 nF