# 生体システム工学 I

次の [I - 1]〜[I - 3] の 3 題を, それぞれ別の解答用紙に答えよ.

## [I - 1]

図 1 (ア) に示すような中心軸 $a_0$，半径 $r_0$ の円柱状導体を，図 1 (イ) に示すような中心軸 $a_1$，内半径 $r_1$，外半径 $r_2$ の円筒状導体内部に，各々の中心軸 $a_0$，$a_1$ を一致させて挿入した無限長の同軸往復回路を考える．図 1 (ウ) は中心軸に垂直な往復回路の断面で，$0 < r_0 < r_1 < r_2$ である．円柱状導体では $I$ (A)，円筒状導体では $-I$ (A) である一様電流が軸方向に進行し，透磁率は $\mu_0$ で一定とする．以下の問に答えよ．

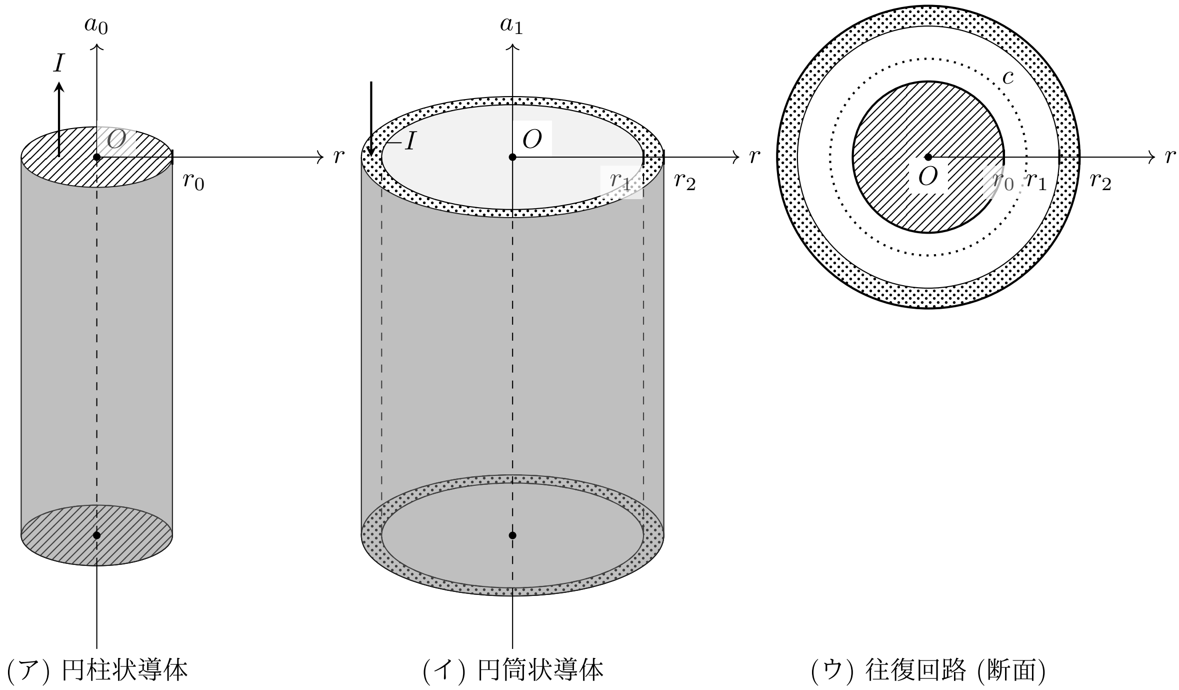


図 1: 同軸往復回路

(問 1)　図 1 (ウ) に破線で例示した中心が $O$，半径が $r$ である円 $c$ を考える．$r$ を $0 < r < \infty$ の範囲で様々な値に設定した時，$c$ で囲まれた領域を通過する電流を $I$ で除算した値 $N(r)$ を求めよ．

(問 2)　往復回路の電流によって生じる磁界の半径依存性 $H(r)$ を求めよ．磁界の単位は (A/m) とする．

(問 3)　$\displaystyle\int_0^\infty \mu_0 H(r) N(r) \mathrm{d}r$ を計算せよ．

(問 4)　(問 3) で計算した定積分を $I$ で除算した結果の物理的意味を答えよ．

[I − 2]

水平面内に置かれたバネ質点系の運動を考える．図 1(A) に示すように，バネの右端には質量 $m$ の質点が接続されており，質点は左右方向にのみ 1 次元的に運動する．バネの左端は，左右に移動させることができる物体に接続されている．バネは，自然長が $\ell_0$ で，フックの法則に従い，バネ定数は $k$ である．また，質点の運動に対して，絶対座標（図で $x$ 軸として描かれた座標系で，バネ左端の物体の運動に関わらず，この空間に固定された座標系）に対する質点の速度に比例した小さな摩擦が存在する．摩擦係数は $b > 0$ とする．図 1(A) のダッシュポットによって生じる摩擦はあくまでも絶対座標に対する質点の速度で決まることに注意する．また，質点がバネ左端の物体に衝突することは無いものとする．時刻 $t$ における絶対座標系に対する質点の位置を $x(t)$，バネ左端（の物体）の位置を $u(t)$ とする．

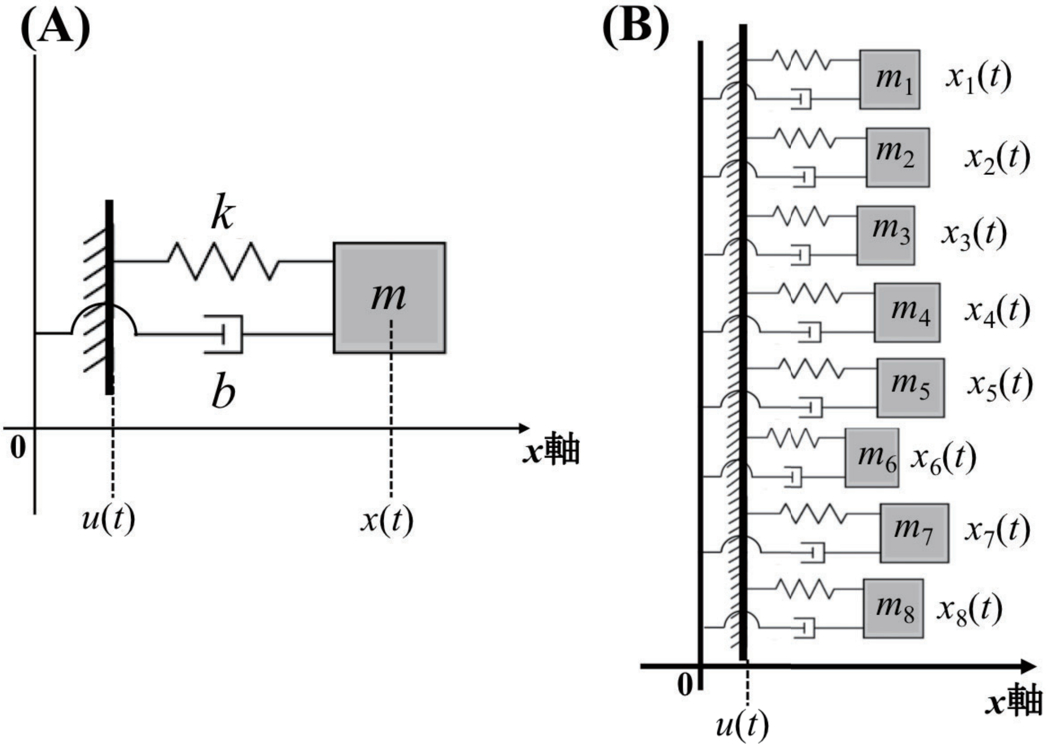


図 1: (A) バネ左端を移動させることができるバネ質点系．(B) 8 個のバネ質点系．

（問１）図 1(A) に示した単一のバネ質点系に対して，$y(t) \equiv x(t) - \ell_0$，および

$$\bar{\omega} \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta \equiv \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

を定義する．このとき，質点の運動方程式，すなわち，$y(t)$ が満たすべき微分方程式を $y(t)$，$\bar{\omega}$，$\zeta$，$u(t)$ を用いて書き下せ．

(次のページに続く)

([I - 2]の続き)

(問２)(問１)で導出した微分方程式で表される系において，系への入力を $u(t)$，系の出力を $y(t)$ とする．系の入出力関係を表す伝達関数 $G(s)$ を求めよ．ここで $s$ はラプラス変数である．

(問３)(問１)で導出した微分方程式で表される系において，$0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ であるとする．$u(t) = \sin \omega t$ に対する定常応答 $y_\infty(t)$ を求めよ．さらに，共振角周波数 $\omega_r$ を求めよ．

以下では，図 1(A) に示した系と同様ではあるが，質量が異なる 8 個の質点からなる系を考える（図 1(B)）．8 個の質点の質量 $m_i$（$i = 1, \cdots, 8$）は未知である．一方，自然長 $\ell_0$，バネ定数 $k$，摩擦係数 $b$ は既知で，全ての質点に対して共通（同一）であるとする．全ての質点は，図 1(B) のように，直線状のひとつの大きな物体（壁）に接続されている．この壁は，(A) の場合と同様に左右に移動させることができ，8 個のバネ質点系を一斉に振動させせることができる．なお，壁を介した質点間の相互作用は一切無いものとする．壁の位置を $u(t)$ とする．また,

$$\bar{\omega}_i \equiv \sqrt{\frac{k}{m_i}}, \quad \zeta_i \equiv \frac{b}{2\sqrt{m_i k}} \quad (i = 1, \cdots, 8)$$

とする．ここでも，$i$ に関わらず $0 < \zeta_i < 1/\sqrt{2}$ であるとする．各質点の位置 $x_i$（$i = 1, \cdots, 8$）は，何らかの方法で同時計測できるものとして，8 個の質点の未知質量 $m_i$（$i = 1, \cdots, 8$）を実験的に推定したい．そのために,

$$u(t) = \sin(\omega(t)t) \tag{1}$$

を用いて壁を振動させる．振動の角周波数は時変で,

$$\omega(t) \equiv \omega_0 + at \tag{2}$$

のように時間と共に変化する．ここで $\omega_0$ と $a$ は正の定数である．式 (1) のような $u(t)$ は掃引信号と呼ばれる．

(問４）掃引信号に対する 8 個の質点の応答から未知質量 $m_i$（$i = 1, \cdots, 8$）を推定する実験に関して，予想される実験結果，解析方法，解析結果を，数式や図を使って詳しく説明せよ．質点の質量推定値が共振周波数のみから一意に決められない場合は，どのような分析によれば、もっともらしい推定値が得られるかも議論せよ．

(問５)(問４)で説明した方法で未知質量の推定を実施する場合，掃引信号の定数 $\omega_0$ と $a$ は，どのような値に設定するべきかを詳しく説明せよ．

[I − 3]

人の流出入が無視できる地域内での感染症の流行過程を，数理モデルを用いて考える．ここでは，時刻 $t$ において，免疫がなく感染する可能性がある者 (感受性保持者) の人口を $S(t)$，感染していて他の人にうつす可能性がある者 (感染者) の人口を $I(t)$，感染後に回復して免疫を獲得した者 (免疫保持者) の人口を $R(t)$ とする．感染による死亡者数も $R(t)$ に含まれるとする．$t \geq 0$，$S(t) \geq 0$，$I(t) \geq 0$，$R(t) \geq 0$ であり，各変数は便宜上，実数値を取るものとする．また，出生による人口増加や，感染症以外の原因での死亡による人口減少は無視できるとし，免疫保持者は再度感染しないとする．このとき，感染症の流行過程は次の式で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) I(t) & \text{(1a)} \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t) & \text{(1b)} \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) & \text{(1c)} \end{cases}$$

ここで，$\beta$，$\gamma$ は正の定数である．さらに，初期値を，

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0$$

とする．$S_0$，$I_0$ は正の定数であり，$S_0 \gg I_0$ とする．また，基本再生産数と呼ばれる無次元量

$$R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma} \tag{2}$$

を定義する．以下の問に答えよ．

(問 1)　式 (1a) の右辺にある $-\beta S(t) I(t)$，および，式 (1b) の右辺にある $-\gamma I(t)$ の意味 (どのような現象を記述しているのか) を，それぞれ説明せよ．

(問 2)　式 (1a)〜(1c) を用いて，$S(t) + I(t) + R(t)$ が一定になることを示せ．

(問 3)　感染が始まった初期 ($t = 0$ の直後) において $S(t) = S_0$ と近似する．このとき，式 (1b) の近似解を求め，感染者数が時間とともに増加する $R_0$ の条件を示せ．

(問 4)　式 (1b) を式 (1a) で辺々割ると，$I = I(S)$ に関する微分方程式

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\gamma}{\beta S} - 1 \tag{3}$$

が得られる．$I = I(S)$ のグラフの概形を描け．ここでは，感染拡大が生じる場合と，生じない場合の $R_0$ の条件を示し，それぞれの場合に分けてグラフを描くこと．

(次のページに続く)

([I - 3]の続き)

(問 5)　$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ となることを示せ.

(問 6)　$R_0 > 1$ のとき，時刻 $t$ $(t > 0)$ での感染の規模を

$$p(t) \quad = \quad \frac{S(0) - S(t)}{S(0)} = 1 - \frac{S(t)}{S_0} \tag{4}$$

の値で評価し，最終的な感染規模を，

$$p_\infty \quad = \quad \lim_{t\to\infty} p(t) \tag{5}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ.

(ア)　$R_0$ を，$p_\infty$ を用いて表せ．ここでは，式 (3) を利用し，$\dfrac{I_0}{S_0} = 0$ と近似せよ.
以下では，ここで求めた関係式を $R_0 = R_0\,(p_\infty)$ と表す.

(イ)　$R_0 = R_0\,(p_\infty)$ について，$\lim_{p_\infty \to +0} R_0$ を求めよ.

(ウ)　$0 < p_\infty < 1$ の範囲において，$R_0 = R_0\,(p_\infty)$ が単調増加することを示せ.

(エ)　感染予防のために，$R_0$ を低下させる対策が重要である理由を説明せよ.