生体システム工学 I

次の [I - 1]〜[I - 3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[I - 1]

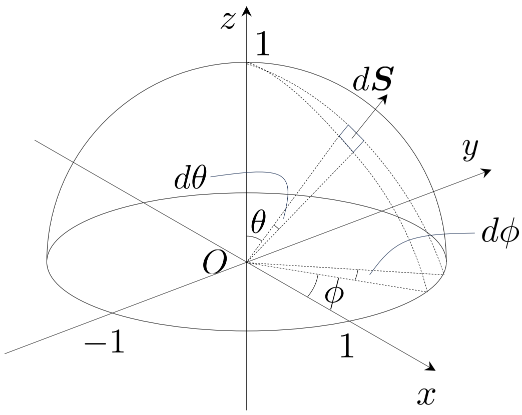

図 1: 半球面 S と微小面素ベクトル $d\boldsymbol{S}$

(問 1)　図 1 は，原点 O を中心とする半径 1 の半球面を表す．半球面上の領域を S，S と xy 平面が接する円周を C とする．ベクトル場

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} -2x-y \\ z-2x \\ y^2 \end{pmatrix}$$

の C に対する線積分および S に対する面積分を考える．

(ア) 媒介変数 t が 0 から 2π まで変化するとき C 上を移動する点を表す位置ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

を考える．$\boldsymbol{r}(t)$ に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ．

(イ) 極座標 ϕ，θ を媒介変数として S 上の任意の点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{q}(\phi,\theta)$ を考える．$\boldsymbol{q}(\phi,\theta)$ の x，y，z 成分を ϕ，θ を用いて表わせ．

(ウ) 図 1 に示すように，ϕ，θ の微小変化 $d\phi$，$d\theta$ に対応する S 上の微小面素を考える．この微小面素の面積と同じ大きさであり，点 $\boldsymbol{q}(\phi,\theta)$ における S の法線ベクトルと同じ方向のベクトル $d\boldsymbol{S}$ は，面素ベクトルと呼ばれる．$d\boldsymbol{S}$ の x，y，z 成分を ϕ，θ，$d\phi$，$d\theta$ を用いて表わせ．

(エ) S 上で $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}$ を面積分し，(ア) の積分結果と一致することを示せ．

(次のページに続く)

(問 2)　ベルヌーイ (Bernoulli) の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t)x^n$$

について考える．ここで x，n は実数であり，$P(t)$，$Q(t)$ は t の関数である．

(ア) $y = x^{1-n}$ と置換するとき，y の微分方程式を求めよ．

(イ) 次の微分方程式を解け．

$$\frac{dx}{dt} = -6t^{-1}x + 3e^t x^{\frac{2}{3}}$$

(問 3)　次の方程式で表される楕円について考える．

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$$

(ア) この楕円の概形を図示せよ．ただし，各軸との交点座標も記せ．

(イ) 対称行列 A を用いて上の方程式を

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表すことを考える．A の要素を記せ．

(ウ) A を対角化せよ．

(エ) この楕円の長軸と短軸の方向を表すベクトルをそれぞれ求めよ．

(オ) この楕円の面積を求めよ．

[I - 2]

デオキシリボ核酸 (DNA) のような高分子の構造を，単純化された 1 次元のセグメント連結モデルを用いて考える．ここでは，高分子の構造を図 1 のような長さ a の硬い棒状のセグメントと，長さが無視できる柔らかい継ぎ手の連結で近似的に表す．セグメントは，x 軸と平行な配置のみをとり，x 軸と直交する方向の厚み，および，継ぎ手の長さは無視できるものとする．隣り合うセグメントのなす角は 180° (隣り合うセグメントがまっすぐの状態)，あるいは，0° (隣り合うセグメントが折り返された状態) のいずれかであり，セグメントの向きはセグメントごとに確率 $\frac{1}{2}$ で独立に決まる．セグメントの総数 N は偶数であるとする．このモデルの固定端の位置を原点 O にとり，固定されていない移動端の位置を確率変数 X で表す．以下では，大文字の X は確率変数，小文字の x はその実現値を表す．移動端の位置 x の定義域は $[-aN, aN]$ である．また，μ を X の期待値，σ を X の標準偏差とする．以下の問に答えよ．

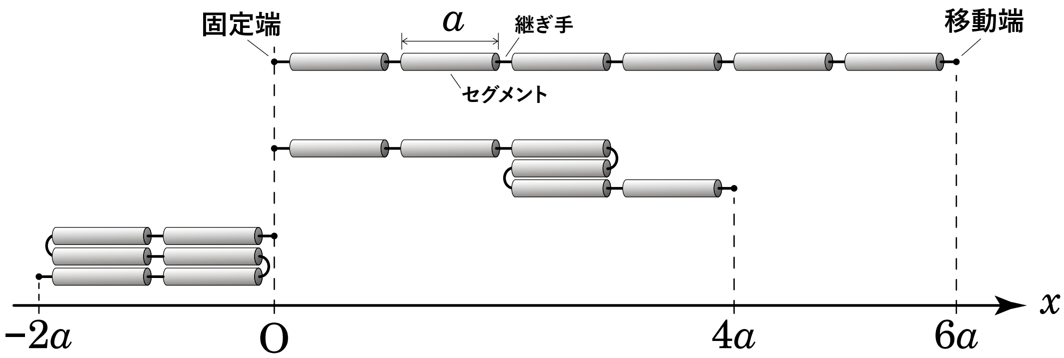

図 1: $N = 6$ のセグメント連結モデルの概略図．セグメント配置の組み合わせが異なる 3 つの例を示した．

(問 1)　$N = 6$ のとき，$X = 2a$ となる確率を求めよ．

(問 2)　固定端から連結されたセグメントを順にたどるとき，x 軸の正方向を向いたセグメントの総数を k とする．N，a，および，k を用いて，移動端の位置 $x\,(k, N)$ を表せ．さらに，$X = x\,(k, N)$ となる確率 $P\,(k, N)$ を求めよ．

(問 3)　(問 2) で求めた $P\,(k, N)$ について

$$\sum_{k=0}^{N} P\,(k, N) = 1$$

が成り立つことを示せ．

(次のページに続く)

(問 4)　X の期待値 μ，および，分散 σ^2 を求めよ．

(問 5)　$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ と置く．ここでは，$N \to \infty$ の極限において，Z が従う確率密度関数 $g(z)$ を求める．正方向を向いたセグメントの総数が従う確率密度関数を $f(k)$ とすれば，対応する区間の確率が保存するので

$$f(k)\Delta k = g(z)\Delta z$$

が成り立つ．ここで，$\Delta k = 1$，$\Delta z = \dfrac{2a}{\sigma}$ である (移動端位置は a の偶数倍の値をとることに注意)．また，N が有限のとき，$P(k,N) = f(k)\Delta k$ が成り立ち，$N \to \infty$ の極限において，$\Delta z \to 0$ となる．

(ア) $\dfrac{g(z+\Delta z)}{g(z)}$ を z，および，Δz を用いた式で表せ．

(イ) $\dfrac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$ を z，Δz，および，$g(z)$ を用いた式で表せ．さらに，$\Delta z \to 0$ の極限をとることにより，

$$\frac{dg(z)}{dz} = -zg(z)$$

が成り立つことを示せ．

(ウ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,dz = 1$ を満たす，$g(z)$ を求めよ．

(問 6)　ここでは，系の自由エネルギー G が与えられた場合のエントロピー的な力について考える．以下では，G に対するエンタルピーの寄与を無視し，G の減少 (あるいは増加) は，エントロピーの増加 (あるいは減少) のみを考えることで記述できるとする．すなわち，セグメント連結モデルにおいて，G は次の式で与えられるとする．

$$G(x) = -k_{\mathrm{B}} T \ln W(x,N)$$

ここで，k_{B} はボルツマン定数，T は系の絶対温度，$W(x,N)$ は移動端位置が x となるセグメント配置の数 (セグメント配置の組み合わせが異なる場合の数) である．セグメント連結モデルの移動端に弱い力を加えて，移動端位置が非常にゆっくりと変化する場合，移動端に働く応力 F は

$$F = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

で与えられる．

(ア) $W(x,N)$ を a, x，および，N の関数として表せ．

(イ) N が非常に大きく，$W(x,N)$ は x の連続関数として近似できるとする ((問 5) (ウ) の結果を参考にせよ)．セグメント連結モデルの移動端に弱い力を加えて，移動端位置が非常にゆっくりと変化するとき，応力 F を求めよ．

(ウ) セグメント連結モデルの移動端に働く応力の特徴を説明せよ．特に，エントロピーとの関係について説明すること．

[I - 3]

図 1 は，抵抗 R，インダクタ L，コンデンサ C 等から構成される回路である．出力インピーダンスが 0 である電源から入力電圧 $v_i(t)$ が印加され，入力インピーダンスが無限大である素子で出力電圧 $v_o(t)$ が観察されるとする．t は時間である．以下の問に答えよ．

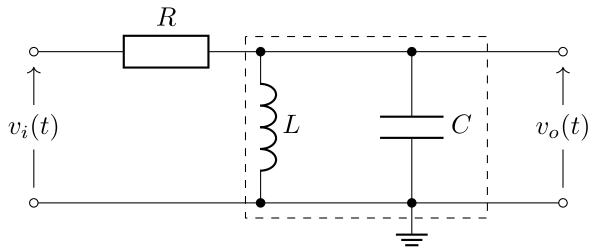

図 1

$V_i \exp(j\omega t)$ を入力すると，$V_o \exp(j\omega t)$ が出力された．j は虚数単位，ω は角周波数である．

(問 1)　点線で囲まれた LC 並列接続の合成インピーダンスを求めよ．

(問 2)　$\dfrac{V_o}{V_i}$ の周波数特性を R，L，C，ω 等を用いて表せ．また，$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ の時の $\dfrac{V_o}{V_i}$ の値を求めよ．

(問 3)　$\omega < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ では $R \gg \omega L$ が，$\omega > \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ では $R \gg \dfrac{1}{\omega C}$ の関係が成り立つとする．
このような場合の $\left|\dfrac{V_o}{V_i}\right|$ の周波数特性の概観を図示せよ．

$v_i(t) = \delta(t)$ の場合を考える．$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数で表されるインパルス信号である．

(問 4)　$\delta(t)$ をフーリエ変換せよ．

(問 5)　$\delta(t)$ 入力における $v_o(t)$ のフーリエ変換を求めよ．

周波数依存性が皆無である白色雑音を $v_i(t)$ として印加する場合を考える．

(問 6)　(問 3) の関係が成り立つ場合，何が出力されるかを答えよ．