

生体システム工学 I

次の [I - 1] ~ [I - 3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[I - 1]

(1) 位置 x と時刻 t の関数 $u(x, t)$ が以下の偏微分方程式 (D は正の定数) を満たす．

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{i})$$

これを，次のように定義する $u(x, t)$ のフーリエ変換 $U(k, t)$ と，その逆フーリエ変換を用いて解くことを考える．ただし， k を実数とし，虚数単位を $i (= \sqrt{-1})$ と表記する．

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp(-2\pi i k x) dx \quad (\text{ii})$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, t) \exp(2\pi i k x) dk \quad (\text{iii})$$

時刻 $t=0$ において $u(x, 0) = u_0(x)$ ， $U(k, 0) = U_0(k)$ とし， $u_0(x)$ は次の正規分布関数 (σ は正の定数) として与える．

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{iv})$$

解答において，次のガウス積分を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \quad (\text{v})$$

ここで， A は正の定数である．以下の問に答えよ．

- (a) 式(iii)を式(i)に代入し， $U(k, t)$ が満たす偏微分方程式を導け．
- (b) 前問(a)の偏微分方程式を解き， $U_0(k)$ を用いて $U(k, t)$ を示せ．
- (c) $u_0(x)$ をフーリエ変換して $U_0(k)$ を求めよ．
- (d) 問(b)，(c) の結果を利用して， $U_0(k)$ を用いずに $U(k, t)$ を示せ．
- (e) $U(k, t)$ を逆フーリエ変換して $u(x, t)$ を求め，それが x の正規分布関数となることを示せ．
- (f) $u(x, t)$ と $u_0(x)$ の関数の形を比較して，時間の経過による $u(x, t)$ の変化の特徴を述べよ．

(2) ある種の機械製品の時刻 t における単位時間あたりに故障する確率（故障率）を調べたところ $s(t)$ であった．このとき以下の問に答えよ．

- (a) この機械製品が時刻 0 で運転を開始してから，時刻 t までの間に故障する確率を $F(t)$ とするとき，この機械製品が時刻 t に至るまでに故障しない確率 $R(t)$ を $F(t)$ を用いて表せ．
- (b) $R(t)$ の時間変化率 $\frac{dR(t)}{dt}$ を $R(t)$ と $s(t)$ を用いて表せ．
- (c) $s(t)$ が t に依存せず，一定値 $s(t) = s_0$ (定数) であるとき， $R(t)$ を s_0 を用いて表せ．
- (d) $s(t)$ が t に依存せず，一定値 $s(t) = s_0$ (定数) であるとき，この機械製品の平均寿命（故障するまでの平均時間）を s_0 を用いて表せ．

[I - 2]

以下の問に答えよ．

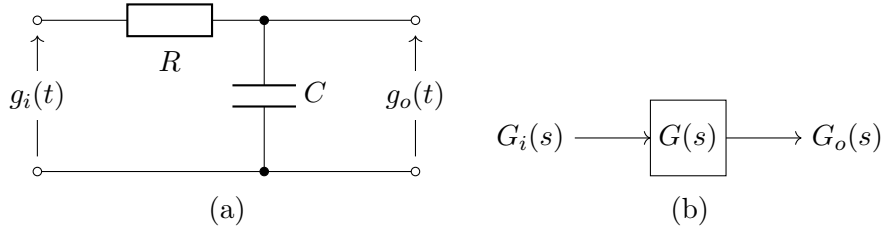


図 1

(問 1) 図 1 (a) は，抵抗 R (Ω)，コンデンサ C (F) 等から構成される回路である．図 1 (a) の入力，出力を，各々， $g_i(t)$ ， $g_o(t)$ とする． t は時間である． $g_i(t)$ ， $g_o(t)$ のラプラス変換を，各々， $G_i(s)$ ， $G_o(s)$ とした時，伝達関数 $G(s) = G_o(s)/G_i(s)$ を求めよ． s は複素周波数である．

(問 2) 図 1 (a) に角周波数が ω である正弦波を入力した際の $G(j\omega)$ の振幅比 $|G(j\omega)|$ ，ならびに，位相差 $\angle G(j\omega)$ の周波数特性を記せ． j は虚数単位 ($j^2 = -1$) である．

(問 3) 図 1 (a) に式 (1) で表すようなステップ関数を入力した際の $g_o(t) = 0$ を書き下せ． $g_o(0) = 0$ とする．

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

(問 4) 図 2 (a) は，抵抗 R_i (Ω)， R_o (Ω)，インダクタ L_o (H)，オペアンプ等から構成される回路である．図 2 (a) の入力 $a_i(t)$ と出力 $a_o(t)$ の関係を， R_i ， R_o ， L_o 等を用いて表せ．また， $a_i(t)$ ， $a_o(t)$ のラプラス変換を，各々， $A_i(s)$ ， $A_o(s)$ とした時，伝達関数 $A(s) = A_o(s)/A_i(s)$ を求めよ． $a_i(0) = a_o(0) = 0$ とする．

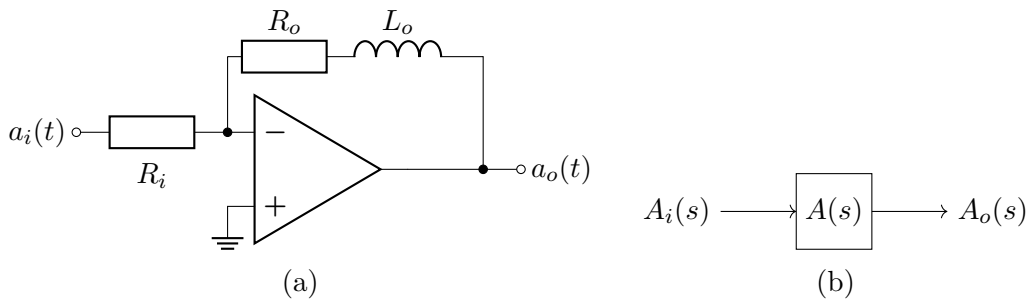


図 2

(問 5) 図 3 のように，図 1 の $G(s)$ と図 2 の $A(s)$ を含む帰還システムを考える．帰還システムの伝達関数 $H(s) = Y(s)/X(s)$ を求めよ．また， $RC = 1$ ， $R_o/R_i = L_o/R_i = 0.5$ の時， $H(s)$ を計算せよ．

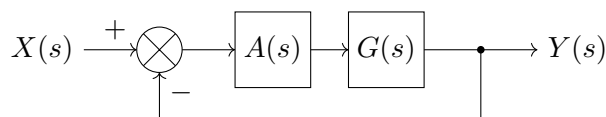


図 3

[I - 3]

以下の問に答えよ.

- (問 1) 電荷も電流もない真空中を伝わる光について考える. 光は真空中に設定した xyz 座標系の x 軸の正の向きに進行する電磁波であるとし, その電場 $\mathbf{E}$ は y 軸方向に振動しているとする. この場合, 電場は x と時刻 t の関数であり, $\mathbf{E}$ の y 成分 $E_y(x, t)$ に関する波動方程式は以下の式 (1) で記述される.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(x, t) \quad (1)$$

ここで, ϵ_0 および μ_0 は, それぞれ, 真空の誘電率および透磁率であり, 正の定数である.

- (ア) 真空中の光の速さを, ϵ_0 と μ_0 を用いて表せ.

- (イ) $E_y(x, t)$ を以下の式 (2) で記述することを考える.

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) \quad (2)$$

ここで, E_0 , k , ω , および θ は正の定数であるとする. 式 (2) で示される波が x 軸の正の向きに進行する速さを, k および ω を用いて表せ.

- (ウ) 式 (2) の $E_y(x, t)$ が, 式 (1) を満たすことを示せ.

- (問2) ここからは、導電性を有する一様な媒質中を伝わる光について考える。媒質は非磁性体で、電氣的に中性であるとする。光は、媒質中に設定した xyz 座標系の x 軸の正の向きに進行する電磁波であるとし、その電場 $\tilde{\mathbf{E}}$ は y 軸方向に振動しているとする。この場合、電場は x と t の関数であり、 $\tilde{\mathbf{E}}$ の y 成分 $\tilde{E}_y(x, t)$ に関する波動方程式は以下の式 (3) で記述される。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{E}_y(x, t) = \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{E}_y(x, t) + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}_y(x, t) \quad (3)$$

ここで、 ϵ , μ , σ は、それぞれ、媒質の誘電率、透磁率、導電率であり、正の定数であるとする。以下では、 $\tilde{E}_y(x, t)$ を以下の式 (4) で記述することを考える。

$$\tilde{E}_y(x, t) = E'_0 e^{i(\tilde{k}x - \omega't + \theta')} \quad (4)$$

ここで、 i は虚数単位 ($i^2 = -1$) を表す。 E'_0 , ω' , および θ' は正の定数であるとする。 $\tilde{k}$ は実部が正の複素数とする。観測可能な電場の y 成分は $\tilde{E}_y(x, t)$ の実部をとることで与えられるとする。また、 $\tilde{k}$, μ , σ , ω' , ϵ の間で以下の式 (5) が満たされているとする。

$$\tilde{k}^2 = \omega' (\epsilon \mu \omega' + i \mu \sigma) \quad (5)$$

- (ア) 式 (4) の $\tilde{E}_y(x, t)$ が、式 (3) を満たすことを示せ。
- (イ) $\tilde{k}$ を、実数 k_r および k_i を用いて $\tilde{k} = k_r + i k_i$ と表すことにする。 k_r および k_i を、それぞれ、 ϵ , μ , σ , ω' , θ' のうち必要なものを用いて表せ。
- (ウ) 光が x 軸の正の向きへ進行するにつれて、その電場が減衰することを示せ。
- (エ) 一様な媒質中を伝わる光の強度が減衰する場合、その減衰の程度は光吸収係数 α ($\alpha > 0$) により定量化される。 x における光の強度を $I(x)$ とすると、本問のように x 軸の正の向きに進行する光の強度は以下の式 (6) に従うとする。

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x) = -\alpha I(x) \quad (6)$$

$x = 0$ において、 $I(0) = I_0$ であったとする。 $I(x)$ を求めよ。

- (オ) 光の強度は電場の振幅の 2 乗に比例する。光吸収係数 α を、 ϵ , μ , σ , ω' , θ' のうち、必要なものを用いて表せ。また、 σ は ϵ と ω' の積に比べて十分に小さく、以下の近似が成り立つとする。

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega'}\right)^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega'}\right)^2 \quad (7)$$

この場合に、 α を ϵ , μ , および σ を用いて表せ。