生体システム工学 Ⅱ

次の [Ⅱ － 1]〜[Ⅱ － 3] の 3 題を，それぞれ別の解答用紙に答えよ．

[Ⅱ － 1]

(1) 3 次元空間において，原点 O を通る任意の回転軸（回転軸の単位ベクトル $\vec{n}$）の周りに，点 P を角度 θ（右ねじ方向を正）だけ回転させた点を P′ とする．点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$，点 P′ の位置ベクトルを $\vec{r'}$ として，以下の問に答えよ．

(a) 点 P が回転する面と回転軸の交点を O′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ を $\vec{n}$ と $\vec{r}$ を用いて表せ．

(b) 点 P を回転軸周りに 90° 回転させた点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{O'Q}}$ を $\vec{n}$ と $\vec{r}$ を用いて表せ．

(c) $\vec{r'}$ を次式で表したときの係数 A，B を求めよ．

$$\vec{r'} = \vec{r} + (\vec{n} \times \vec{r})\,A + \{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r})\}\,B$$

(d) $\vec{n} = (n_1\ \ n_2\ \ n_3)^{\mathrm{T}}$, $\vec{r} = (r_1\ \ r_2\ \ r_3)^{\mathrm{T}}$ とする．ベクトル積 $\vec{n} \times \vec{r}$ を $\vec{r}$ の一次変換として表現したとき，すなわち $\vec{n} \times \vec{r} = [N]\,\vec{r}$ と表したときの行列 $[N]$ を求めよ．

(e) ベクトル $\vec{r}$ を $\vec{r'}$ に変換する回転行列を単位行列 $[I]$，θ，および問(d)で求めた $[N]$ を用いて表せ．

(2) 変数 x の関数 $y = y(x)$ に対する 1 階及び 2 階の導関数を $y'(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y''(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ とするとき，微分方程式

$$y''(x) + y(x) = \delta(x - \pi) + \delta(x - 2\pi)$$

を

$$y'(0) = 1,\ \ y(0) = 0$$

の条件のもとでラプラス変換を用いて解き，$y(x)$ $(0 \le x \le 6\pi)$ の概形を描け．ここで，$\delta(x)$ はデルタ関数を表す．

［ Ⅱ － 2 ］

図 1 のように，半径 r_i である円筒 C_i と半径 r_o である円筒 C_o が真空中に同軸で配置されているケーブルを考える $(0 < r_i < r_o)$．これらの円筒の厚みは無視できるとする．図 1 は同軸方向のケーブル断面 (xy 平面) で，O は軸中心である．

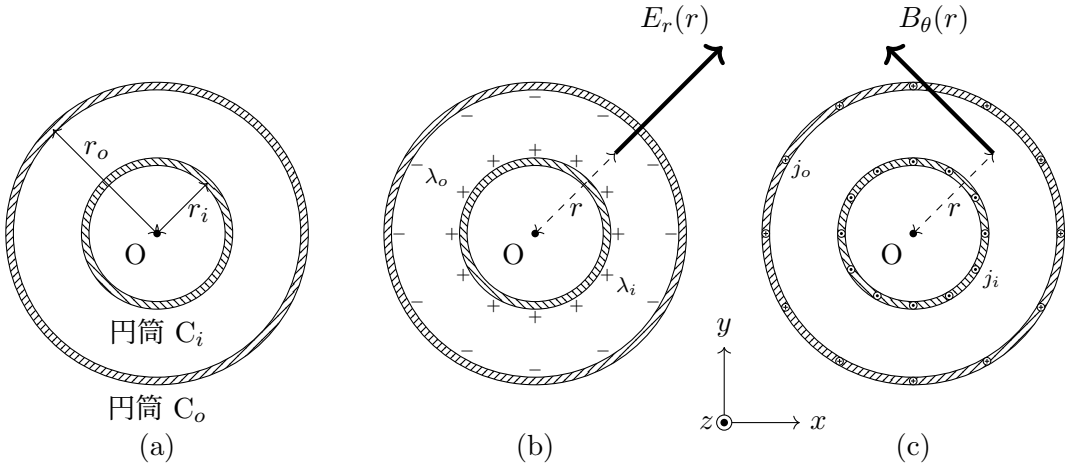

図 1

図 1 (b) のように，円筒 C_i の外側が電荷の線密度 λ_i で，円筒 C_o の内側が電荷の線密度 λ_o で一様に帯電しており，$\lambda_i r_i + \lambda_o r_o = 0$ を満たす．以下の問に答えよ．

（問 1）O からの距離 r における電界の半径方向成分 $E_r(r)$ を求めよ．

（問 2）O からの距離 r における電位 $V(r)$ を算出せよ．なお，$V(\infty) = 0$ とする．

（問 3）円筒 C_i と C_o の間に存在する単位長あたりの静電容量を求めよ．

図 1 (c) のように，円筒 C_i，C_o の z 軸方向の電流線密度は，各々，j_i，j_o であり，$j_i r_i + j_o r_o = 0$ を満たす．$\oplus$ は紙面表から裏へ向かう方向，$\odot$ は紙面裏から表へ向かう方向を示す．以下の問に答えよ．

（問 4）O からの距離 r における磁束密度の動径と直交する方向成分 $B_\theta(r)$ を求めよ．

（問 5）式 (1) で表される $B_\theta(r)$ の不定積分を計算せよ．

$$A_z(r) = \int B_\theta(r)\mathrm{d}r \tag{1}$$

（問 6）ケーブル同軸方向の単位長あたりのインダクタンスを求めよ．

[Ⅱ － 3]

サンプリング間隔 1 秒で計測された観測時系列 $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を，Savitzky-Golay フィルタを用いて平滑化することを考える．ここで，n は整数であり，$x[n]$ は時刻 n 秒での値を表すとする．m を正の奇数，p を 0 以上の偶数として，フィルタ長 m の p 次 Savitzky-Golay フィルタにより平滑化された出力 $y[n]$ は，次の計算手順で与えられる (図 1 参照).

1)　時刻 n_0 秒での出力 $y\,[n_0]$ を計算するために，$n = n_0$ を中央にとったフレーム幅 m の部分時系列

$$\{x[n_0 - (m-1)/2], \cdots, x[n_0 - 1], x[n_0], x[n_0 + 1], \cdots, x[n_0 + (m-1)/2]\}$$

に対し，最小 2 乗法を用いて p 次多項式 $f_p[n] = c_0 + c_1\, n + \cdots + c_p\, n^p$ を当てはめる.

2)　1) で求めた $f_p[n]$ に $n = n_0$ を代入した値を，時刻 n_0 秒での平滑化された出力 $y\,[n_0]$ とする.

3)　n_0 を 1 点ずつシフトさせ，1) および 2) の手順を繰り返すことで順次 $y\,[n_0]$ を計算する.

ここでは，任意の時刻 n 秒での平滑化において，フレーム幅 m の部分時系列が欠損するような端点はないものとする．Savitzky-Golay フィルタに関する以下の問に答えよ.

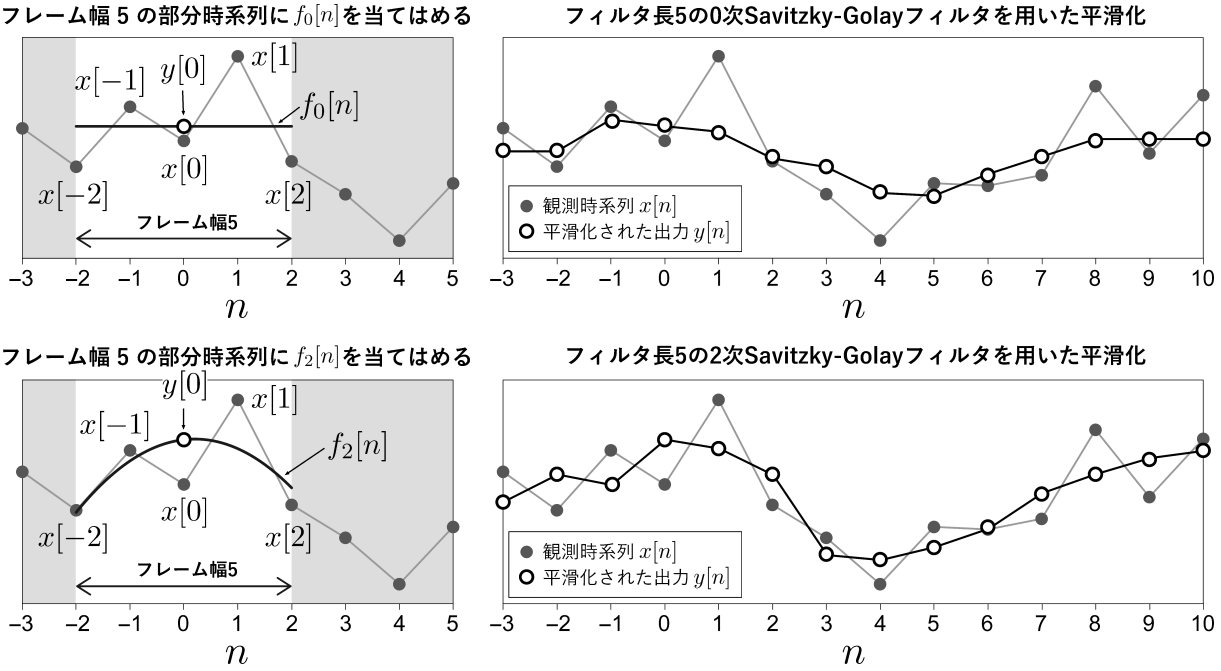

図 1: (左) Savitzky-Golay フィルタの考え方 ($m = 5$，$n_0 = 0$ の場合)．フレーム幅 5 の部分時系列 $\{x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2]\}$ に，p 次多項式 $f_p[n] = c_0 + c_1\, n + \cdots + c_p\, n^p$ を当てはめる．(右) $\{x[n]\}$ を平滑化した $\{y[n]\}$ の例．上段は，0 次 Savitzky-Golay フィルタ，下段は 2 次 Savitzky-Golay フィルタ.

(次のページに続く)

（問 1）以下では，0 次 Savitzky-Golay フィルタについて考える．このフィルタでは，$f_0[n] = c_0$ を部分時系列に当てはめる．フィルタ長 m の場合，時刻 n 秒において平滑化された出力 $y[n]$ は，

$$\sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \left(x[n+k] - c_0\right)^2$$

を最小にする c_0 で与えられる．

(ア) フィルタ長 m の 0 次 Savitzky-Golay フィルタの時刻 n 秒における出力 $y\,[n]$ を次の畳込み和の形で表す．

$$y[n] = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} w_k\, x[n-k] \tag{1}$$

このとき，$\{w_k\}_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2}$ を求めよ．

(イ) 角周波数 ω，および，初期位相 ϕ を定数とし，観測時系列が，

$$x[n] = \cos\left(\omega n + \phi\right) \tag{2}$$

で与えられるとする．フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタの時刻 n 秒での出力 $y[n]$ を

$$y[n] = A(\omega)\, \cos\left(\omega n + \phi\right) \tag{3}$$

の形で表すとき，$A(\omega)$ を求めよ．

(ウ) 時系列 $\{x[n]\}$ の両側 Z 変換を次式で定義する．

$$X(z) \;\; = \;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{4}$$

ここで，z は複素数である．観測時系列を $\{x[n]\}$ とし，フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタの出力 $\{y[n]\}$ の両側 Z 変換 $Y(z)$ を

$$Y(z) = H(z)\, X(z) \tag{5}$$

の形で表す．$H(z)$ を z を用いた式で表せ．

(エ) フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタの周波数特性は，前問 (ウ) で求めた $H(z)$ に，角周波数を ω，サンプリング間隔を Δt，虚数単位を i ($i^2 = -1$) として，$z = e^{i\omega\Delta t}$ を代入することで調べることができる．その理由，および，フィルタの周波数特性について説明せよ．ここでは，$\Delta t = 1$ 秒として，(問 1) の (イ) で求めた $A(\omega)$ が，$H\left(e^{i\omega}\right)$ と一致する理由についても説明すること．

(次のページに続く)

（問 2）以下では，サンプリング間隔 1 秒で計測された観測時系列 $\{x[n]\}$ に対し，同じ Savitzky-Golay フィルタを 2 回繰り返して適用することを考える．すなわち，$\{x[n]\}$ に Savitzky-Golay フィルタを適用し，出力 $\{y_1[n]\}$ を得た後に，$\{y_1[n]\}$ を入力として同じフィルタを適用し，出力 $\{y_2[n]\}$ を得る．

(ア) フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタを 2 回繰り返して適用したときの出力 $\{y_2[n]\}$ の両側 Z 変換 $Y_2(z)$ を，

$$Y_2(z) = H_2(z)\, X(z) \tag{6}$$

の形で表す．$H_2(z)$ を z を用いた式で表せ．

(イ) フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタを 2 回繰り返して適用したときの時刻 n 秒での出力を次の畳込み和の形で表す．

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k\, x[n-k] \tag{7}$$

このとき，$\{w_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ を求めよ．

(ウ) 角周波数 ω，および，初期位相 ϕ を定数とし，観測時系列が，

$$x[n] = \cos(\omega n + \phi) \tag{8}$$

で与えられるとする．フィルタ長 3 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタを 2 回繰り返して適用したときの時刻 n 秒での出力 $y_2[n]$ を

$$y_2[n] = A_2(\omega)\, \cos(\omega n + \phi) \tag{9}$$

の形で表すとき，$A_2(\omega)$ を求めよ．

(エ) (問 1) の (イ) で求めた $A(\omega)$ と，(問 2) の (ウ) で求めた $A_2(\omega)$ のそれぞれを，ω の 2 次の項までマクローリン展開せよ．この結果を参考にして，0 次 Savitzky-Golay フィルタを 1 回適用した場合と，2 回適用した場合のフィルタ特性の違いを説明せよ．

(次のページに続く)

（問 3）以下では，フィルタ長 5 の 2 次 Savitzky-Golay フィルタについて考える．時刻 n 秒における出力を次の畳込み和の形で表す．

$$y[n] = \sum_{k=-2}^{2} w_k \, x[n-k] \tag{10}$$

（ア）$\{w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2\}$ を求める計算の簡単化のため，式 (10) において $n = 0$ の場合を考え，部分時系列

$$\{x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2]\}$$

に，2 次多項式

$$f_2[n] = c_0 + c_1 \, n + c_2 \, n^2 \tag{11}$$

を最小 2 乗法で当てはめる．この場合，フィルタの出力は，$y[0] = f_2[0] = c_0$ となる．
最小 2 乗法の計算において，c_0, c_1, c_2 は，

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=-2}^{2} x[k] \\ \sum_{k=-2}^{2} k \, x[k] \\ \sum_{k=-2}^{2} k^2 \, x[k] \end{pmatrix} \tag{12}$$

を満たす．このとき，行列

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{13}$$

および，その逆行列 B^{-1} を求めよ．

（イ）式 (10) の $\{w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2\}$ を求めよ．

（ウ）フィルタ長 5 の 0 次 Savitzky-Golay フィルタと，フィルタ長 5 の 2 次 Savitzky-Golay フィルタのフィルタ特性の違いを説明せよ．