機械科学 II

（問題 1 から問題 3 のすべてに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に 2 枚以上の解答用紙を用いる場合は，「問題 1（2 枚目）」のように記入せよ．）

問題 1

長さ L，断面積 A，縦弾性係数（ヤング率）E および密度 ρ の棒の縦振動を考える．棒の長手方向に沿って x 軸をとり，時刻 t における位置 x の縦変位を $u(x,t)$ とする．A, E, ρ は全長にわたって一定とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 図 1 より，x 断面のひずみが $\partial u/\partial x$ で与えられるとき，x 断面と $x+\delta x$ 断面に働く軸力を書け．

(2) 微小部分 δx に注目して，運動方程式を導出せよ．

(3) $u(x,t)=T(t)X(x)$ と変数分離し，$T(t)$ の満たすべき方程式が任意定数 ω を含んで

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2T=0$$

のように与えられるとき，$X(x)$ の満たすべき方程式を書け．

(4) 図 2 に示すように，棒の一端が固定され，他端が自由の場合の境界条件 ($u|_{x=0}=0$, $\partial u/\partial x|_{x=L}=0$) について $X(x)$ の基準関数を導出せよ．

(5) (4) の境界条件に加えて，初期条件が $u|_{t=0}=\varphi_0(x)$，$\partial u/\partial t|_{t=0}=0$ のとき，$u(x,t)$ を求めよ．

(6) 次の積分

$$H(t)=\int_0^L\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]A\mathrm{d}x$$

について，$\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$ を示し，その物理的意味を答えよ．

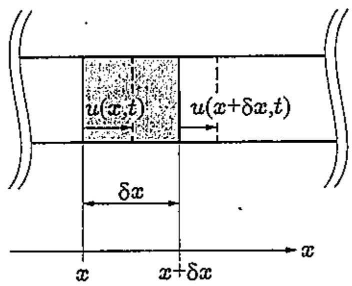


図 1

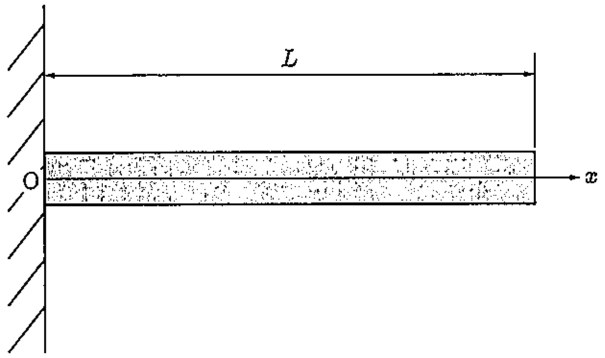


図 2

問題２

[A] 図１のように，一定の断面積 A をもつ円筒状の容器を，もれがなく滑らかに動く円板で２つの部分に仕切る．これら２つの部分に，それぞれ，質量 m，気体定数 R，定圧比熱 c_p の理想気体を封入する．ここで c_p は定数とする．仕切りの円板および容器の側面は断熱材で作られており，また，端面１および端面２にはそれぞれ熱源が接している．熱源の絶対温度をいずれも T_0 に保ったところ，仕切り板は容器の中央で静止した（状態 $\mathrm{G_1}$）．このとき仕切り板から端面までの距離を L で表し，また，仕切り板の厚みは無視できるものとする．

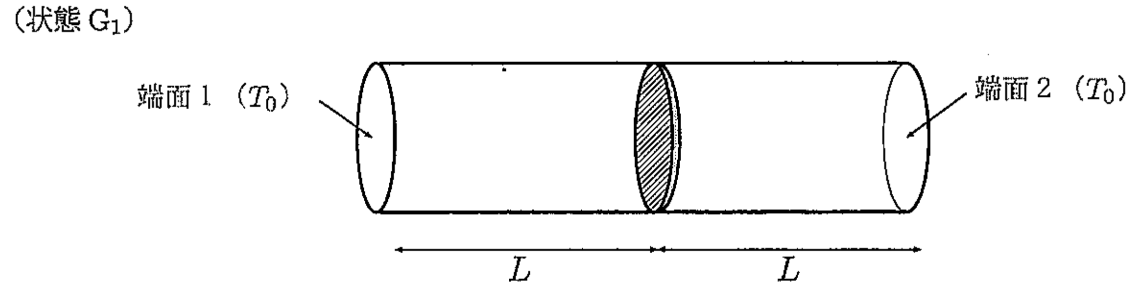


図１

次に，端面１に接する熱源の温度を準静的に上昇させると同時に，端面２に接する熱源の温度を準静的に下降させる．この過程において，それぞれの熱源の温度と T_0 との差の絶対値は常に同じであるようにする．十分にゆっくりと熱源の温度を変化させた結果，それぞれの熱源の温度は $T_0+\Delta T$ および $T_0-\Delta T$ となり，仕切り板は移動して静止した（状態 $\mathrm{G_2}$）．

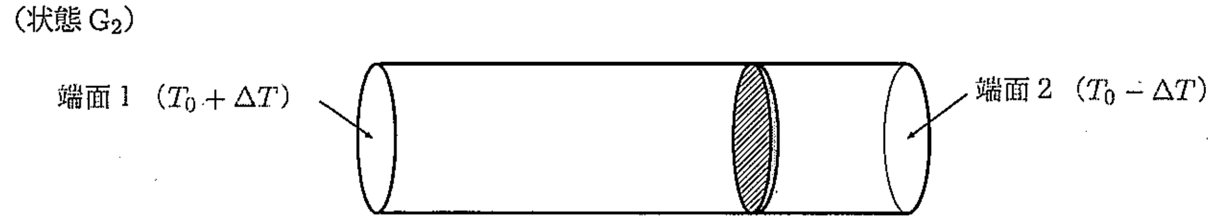


図２

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 状態 $\mathrm{G_1}$ における気体の圧力を求めよ．

(2) 状態 $\mathrm{G_2}$ における気体の圧力を求めよ．

(3) 状態 $\mathrm{G_1}$ から状態 $\mathrm{G_2}$ への過程において，端面１から流入する熱量を求めよ．

(4) 状態 $\mathrm{G_1}$ から状態 $\mathrm{G_2}$ への過程における気体全体のエントロピー変化 ΔS を求めよ．

(5) 状態 $\mathrm{G_1}$ から状態 $\mathrm{G_2}$ への過程において，この容器内におけるエントロピー生成を求めよ．ただし，エントロピー生成とはエントロピーの変化 ΔS から，この過程における $\int_{\mathrm{G_1}\to\mathrm{G_2}} \mathrm{d}Q/T$ を差し引いたものである．ここで，$\mathrm{d}Q$ は熱源から流入する熱量，T は熱源の温度である．

問題２の続き

[B] [A] で用いた断面積 A の円筒状の容器内の仕切り板と気体を取り除き，熱伝導率 λ の固体を容器内に充填する．固体の密度は一定であるとする．また側面は断熱材で作られており，図３に示す x 軸方向にのみ熱は移動する．端面１の位置を $x=0$，端面２の位置を $x=2L$ とする．まず，端面１および端面２をそれぞれ一定の温度 $T_0+\Delta T$ および $T_0-\Delta T$ に保ち，十分に時間が経過した定常状態（状態 S_1）を考える．このとき以下の問に答えよ．

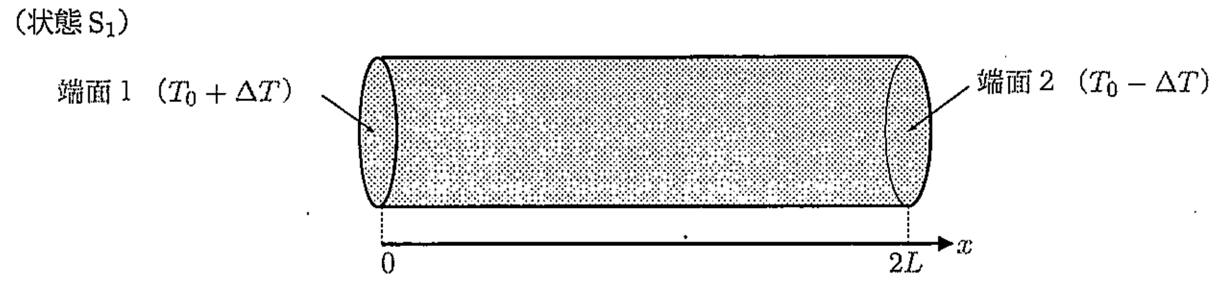


図３

(6) 固体の温度分布 $T(x)$ を求めよ．

(7) 端面１から単位時間あたりに流入する熱量を求めよ．

(8) この容器内における，単位時間あたりのエントロピー生成を求めよ．

次に，状態 S_1 において瞬時に端面１および端面２を断熱壁で覆った（状態 S_2）．この時刻を $t=0$ とする．状態 S_2 から十分に時間が経過した後の状態を状態 S_3 とする．時刻 t における位置 x での固体の温度を $T(x,t)$ とするとき，状態 S_2 から状態 S_3 への過程に関して，以下の問に答えよ．

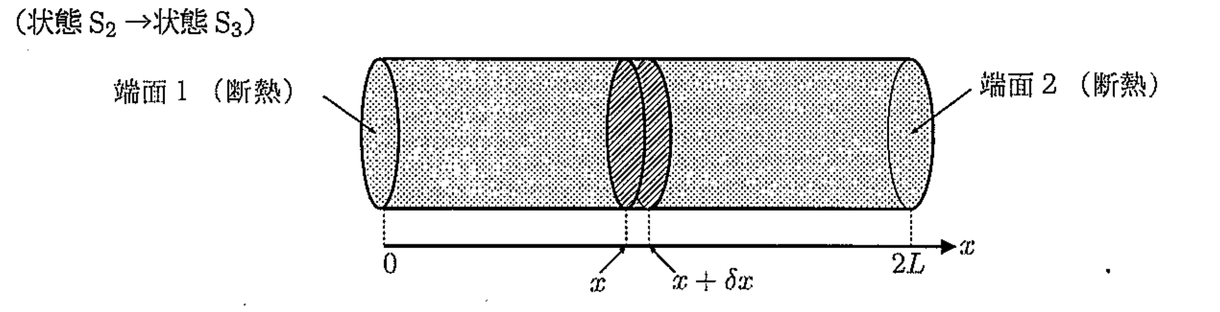


図４

(9) 図４に示す x と $x+\delta x$ の間の微小部分に単位時間あたりに流入する正味の熱量を求めよ．ただし，δx は十分に小さいとし，$(\delta x)^2$ に比例する量は無視してよい．

(10) (9) の結果を用いて，この微小部分における単位時間あたりのエントロピーの変化を求めよ．

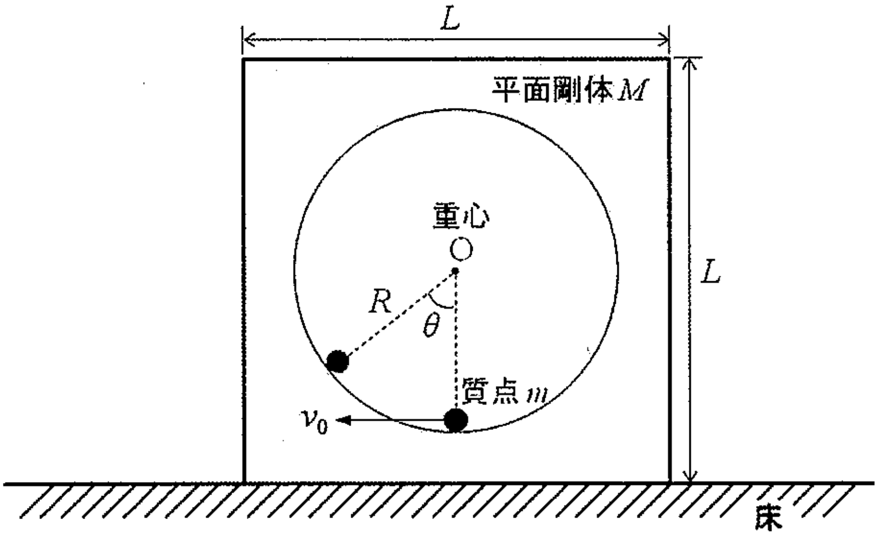
(11) (10) の結果を用いて，この微小部分における単位時間あたりのエントロピー生成を求め，これが非負の値となることを示せ．

(12) 状態 S_2 から状態 S_3 への過程における，この容器内でのエントロピー生成を A，λ，L，固体の熱拡散率 κ および $\theta=\Delta T/T_0$ で表せ．

問題３

一辺の長さが L の正方形に半径 R $(L > 2R)$の円形の穴が空いた形状の平面剛体が，水平な剛体の床の上に置かれている．平面剛体の質量は M で，穴の中心は平面剛体の重心と一致する．穴の円周上には質量 m の質点が置かれ，静止している．重心と質点を結ぶ線分が鉛直下向き方向から時計回りになす角度を θ，重力加速度の大きさを g とする．平面剛体と質点との間の摩擦は無視できるものとして，以下の問に答えよ．

まず，平面剛体を床に完全に固定した上で，図のように質点に対して水平左向き方向に初期速さ v_0 を与えたところ，質点は穴の円周に沿って $\theta_{\max}$ まで上昇し，その後下降した．ただし，$\theta_{\max} < \pi/2$ [rad]とする．



(1) v_0 を $\theta_{\max}$，R，g を用いて表せ．

(2) 質点が上昇しているときに，質点が平面剛体から受ける垂直抗力 N を θ, v_0, m, R，g を用いて表せ．

次に十分大きな v_0 を与えたところ，質点は穴の円周に沿って離れることなく一周し，もとの位置を通過した．

(3) 質点が平面剛体から離れることなく穴を一周するために必要な最小の v_0 を R，g を用いて表せ．

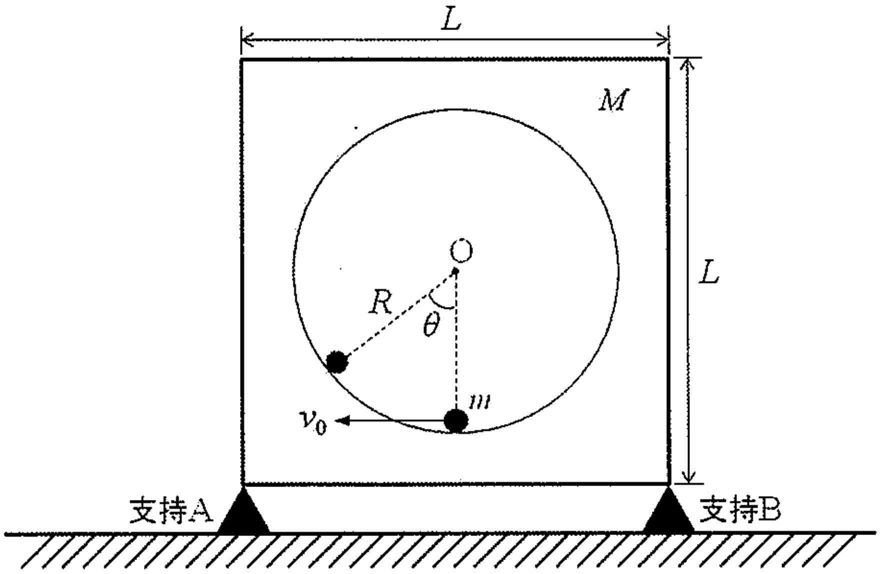
(4) 質点が一周する間，床が平面剛体におよぼす鉛直方向上向きの力の最大値 $F_V^{\max}$ および最小値 $F_V^{\min}$ を v_0，M，m，R，g を用いて表せ．

問題３の続き

次に(3)で求めた初期速さより小さな v_0 を与えたところ，質点が最高点（$\theta = \pi$ [rad]）に到達する前に，$\theta = \theta_R$ で穴の円周から離れ落下した．

(5) $\cos\theta_R$ を v_0，R，g を用いて表せ．
(6) このようなことが起こりうる条件を v_0，R，g を用いて表せ．

この平面剛体を床から取り外し，図のように平面剛体の下辺の両端が，支持 A と支持 B の上にちょうど支持されるように置いた．これらの支持は床の上に完全に固定されている．また，平面剛体は支持によって水平方向には動かないようになっているが，支持から上方には離れることができる．この状態で質点を元の $\theta = 0$ [rad]の位置に戻し，再び水平左向きに速さ v_0 を与えた．



(7) 質点が円周に沿って θ の位置まで上昇したとき，支持 A の支持部まわりのモーメントのつり合い式から，平面剛体が支持 B より受ける垂直抗力 N_B を θ, v_0, M, m，R，g を用いて表せ．ただし，平面剛体は支持から離れていないものとする．
(8) 質点が $\theta < \pi/2$ [rad]の位置にあるときには平面剛体は支持から離れず，質点が $\theta = \pi/2$ [rad]の位置に到達したときに平面剛体は支持 B から離れた．このときの v_0 を M，m，R，g を用いて表せ．