機械科学I

（問題１から問題３の全てに解答し，それぞれ別の解答用紙に記入せよ．各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合には，「問題１（２枚目)」などのように記入せよ.）

問題１

(1) 以下の問に答えよ．

(a) 次の行列 $\mathbf{M}$ の階数を求めよ．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) 3 次元空間内の 3 つのベクトル $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{c}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ に対して，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．ここで，ベクトル $\mathbf{q}$ に対する転置ベクトルを $\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$ と表記する．

(c) 次の行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めて，行列 $\mathbf{A}$ を対角化せよ．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

さらに，次の式で定義される行列 $\mathbf{A}$ の指数関数を計算し，3 行 3 列のすべての成分を示せ．ただし，$\mathbf{I}$ は 3 行 3 列の単位行列である．

$$\exp(\mathbf{A})=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots=\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}$$

(2) 以下の問に答えよ．なお，虚数単位を $i\ \left(=\sqrt{-1}\right)$ と表記する．

(a) 次の複素関数 $f(z)$ が正則であることから，実定数 a，b，c，d の間に成り立つ条件を求めよ．ただし，$z=x+iy$ である．ここで，x，y は実数である．

$$f(z)=(ax+by)+i(cx+dy)$$

(b) 閉経路 C に沿った次の複素関数の積分の値を求めよ．なお，閉経路 C は円 $|z|=3$ で，向きは反時計回りとする．

(I) $$\oint_C \frac{2z}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

(II) $$\oint_C \frac{\exp(z)}{(z-1)(z+2)^2}\mathrm{d}z$$

問題２

図 2-1(a)に示すように，A 点が固定支持された長さ L の片持ちはり AB に対して，A 点から $s\,(0<s<L)$だけ離れた C 点に集中荷重 P を負荷する．このはりの断面図形として，図 2-1(b)から(d)に示す一辺の長さが h の 3 種類の正方形を考える．ただし，断面図形における材料１および材料２のヤング率は，それぞれ E および $2E$ とし，図 2-1(d)は材料１と材料２からなる組み合わせはりの断面である．また，x 軸の原点は A 点とし，z 軸は各断面図形の図心 G を通るものとする．以下の問に答えよ．ただし，はり AB の自重は無視できるものとする．

(1) はり AB のせん断力線図と曲げモーメント線図を描け．

(2) はり AB の断面図形(b)と(c)に対して，z 軸に関する断面二次モーメントをそれぞれ求めよ．

(3) はり AB の断面図形を(b)とし，C 点の位置を $s = 2L/3$ とする．このとき，はりのたわみ曲線と曲げ応力の最大値を求めよ．

(4) はり AB の断面図形を(c)とする．このはりの曲げ応力の最大値が，問(3)で求めた曲げ応力の最大値と一致するとき，C 点の位置 s を求めよ．

(5) はり AB の断面図形が(d)のとき，中立軸は図心 G から y 軸正方向へ移動する．このとき，断面における力の釣り合い式~~を導くとともに~~に基づき，中立軸の移動量を求めよ．

(6) 断面図形(b)に対する曲げ剛性と，断面図形(d)に対する曲げ剛性の比を求めよ．

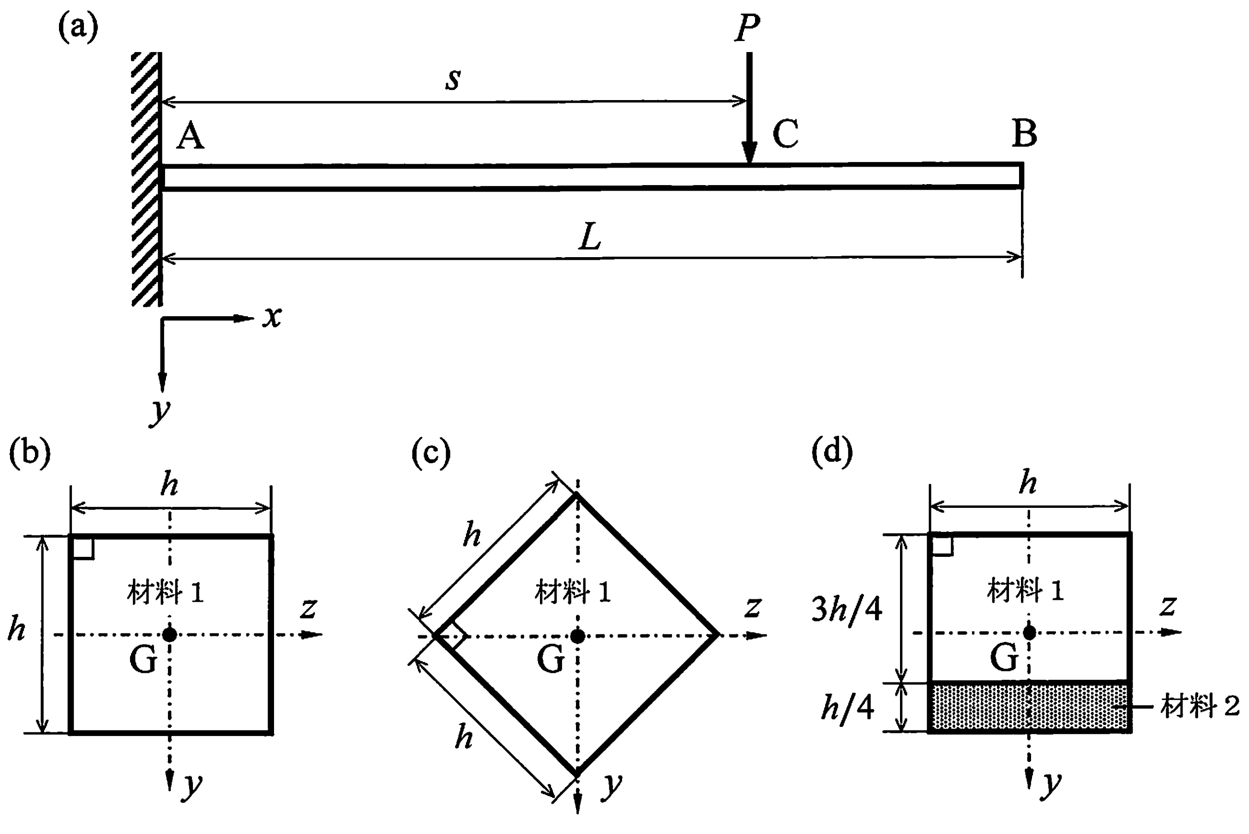

図 2-1

問題３

(1) ポリトロープ変化は理想気体の可逆変化である．ポリトロープ変化では，理想気体の体積の α 乗と圧力との積が一定に保たれる．以下では，気体定数 R，定積比熱 c_v，質量 m の理想気体のポリトロープ変化を考える．定積比熱 c_v は一定である．

(a) 指数 α でポリトロープ変化するこの理想気体の比熱を求めよ．

次に，ポリトロープ変化の具体例として，図 3-1 に示すような，密閉され周囲から断熱されたシリンダ内における上記の理想気体の状態変化を考える．シリンダ内には断面積 A のピストンによりこの気体が封入されており，ピストンはばね定数 k の線形ばねでシリンダ上部に取り付けられている．シリンダとピストン上面に囲まれた空間は真空と見なしてよい．ピストンは，その質量を無視でき，シリンダに沿って気密性を保ちながら滑らかに上下できる．シリンダとピストン下面に囲まれた空間の容積を V とし，$V=0$ となる位置にピストンが下がった状態では，ピストンはばねから力を受けないものとする．気体とシリンダとの間，および気体とピストンとの間での熱の授受は無視できるものとする．気体の体積が $V=V_1$ となる位置でピストンが静止した状態から，大きさの無視できるヒータにより気体をゆっくりと加熱すると，気体は膨張してピストンを押し上げ，加熱を止めると，気体の体積が $V=V_2$（$>V_1$）となる位置でピストンは再び静止した．以下の問に答えよ．

(b) この膨張過程に対する α の値を求めよ．

(c) 体積 V（$V_1<V<V_2$）の気体の絶対温度を求めよ．

(d) この膨張過程において気体がした仕事を求めよ．

(e) この膨張過程において気体に与えられた熱量を求めよ．

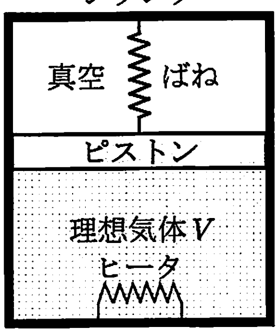

図 3-1

(2) 図 3-2 に示すように，問 (1) と同一のシリンダ内に同一のピストンにより封入された，問 (1) と同一の理想気体を考える．ただし，この場合にはピストンは留め具でシリンダに固定されている．シリンダの全容積からピストンの体積を除いた（一定）容積を V_t とする．図のピストンが固定された状態の気体の体積を V_1，圧力を p_1 とする．このとき，シリンダとピストン上面に囲まれた空間は真空と見なし，その容積は $V_\mathrm{t}-V_1$ である．まず，問 (1) と同様に，ピストンの質量を無視できる場合を考える．気体に仕事をしないようにピストンの留め具を取り除くと，気体は膨張し，十分時間が経過した後，気体の変化が止まった状態に落ち着いた．以下の問に答えよ．

（次ページに続く）

問題３の続き

(f) 膨張後の気体の絶対温度を求めよ．

(g) 膨張前と膨張後の気体のエントロピーの差を求め，この状態変化は可逆か不可逆かを判定せよ．

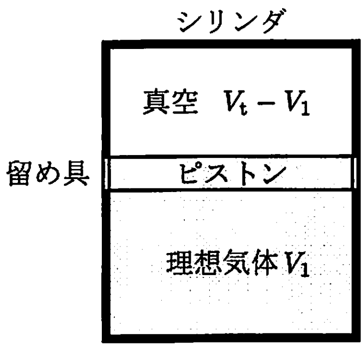

図 3-2

次に，図 3-3(イ) に示すように，重力加速度の大きさ g の重力作用下でピストンの質量 M が無視できない場合を考える．気体に仕事をしないようにピストンの留め具を取り除くと，十分時間が経過した後，ピストンの質量に応じて，図 3-3(ロ) あるいは図 3-3(ハ) に示すような気体の変化が止まった状態に落ち着いた．(ロ) の状態ではピストンはシリンダ上端に達しておらず，その状態に至る過程でピストンはシリンダに衝突しないものとする．一方，(ハ) の状態ではピストンはシリンダ上端に達しているものとする．ただし，ピストンは常に水平に保たれる．また，気体に作用する重力は無視できる．以下の問に答えよ．

(h) 図 3-3(ロ) と図 3-3(ハ) の各状態について，気体の圧力が満足すべき条件を，ピストンの質量 M，ピストンの断面積 A，重力加速度の大きさ g を用いてそれぞれ示せ．

(i) 図 3-3(ロ) の状態の気体の絶対温度を求めよ．

(j) 図 3-3 の (イ) の状態と (ロ) の状態との間の気体のエントロピーの差を求め，この状態変化は可逆か不可逆かを判定せよ．

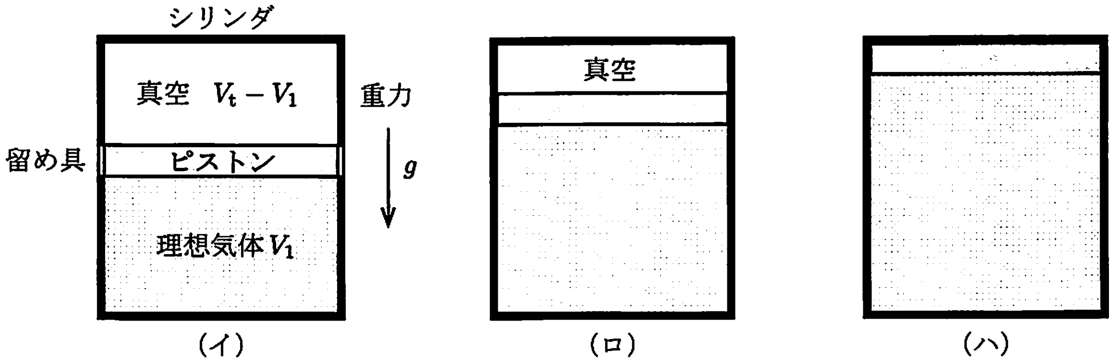

図 3-3