

機械科学Ⅱ

（問題1から問題3の全てに解答し、それぞれ別の解答用紙に記入せよ。各問題に2枚以上の解答用紙を用いる場合には、「問題1（2枚目）」などのように記入せよ。）

問題1

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(a) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2x^2$

(2) 次の微分方程式について、以下の問に答えよ。

$$(\exp(x) + y^2)dx + (2xy + \exp(y))dy = 0$$

(a) 完全微分方程式であることを示せ。

(b) この微分方程式を解け。

(3) 以下の問に答えよ。

(a) $\log \frac{1+x}{1-x}$ のマクローリン展開は、次の式で表される。

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\beta n + \gamma}}{\beta n + \gamma}$$

このとき、定数 α , β , γ を求めよ。ただし、 $|x| < 1$ とする。

(b) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

(4) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を次のように定義する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

ここで、 $i (= \sqrt{-1})$ は虚数単位である。このとき、関数 $f(t) = \exp(-a|t|)$ をフーリエ変換し、実部と虚部をそれぞれ求めよ。ただし、 a は実定数 ($a > 0$) である。

問題 2

図 2-1 に示すような，中心軸を共通とする半径 R_1 の内円筒と半径 R_2 ($> R_1$) の外円筒の間の領域に，非圧縮性流体が満たされている系を考える．内円筒を静止させて，外円筒に対して軸方向単位長さあたりにトルク T を加えることで，周方向 (θ 方向) に一様な定常流れを作る．このとき，外円筒は反時計回りに一定の角速度 (≥ 0) で回転し，中心軸からの距離を r として，流体は周方向に流速 $u(r)$ で流動する．流体中のせん断応力の $r\theta$ 成分を r の関数として $\tau(r)$ と表す．せん断速度は $\dot{\gamma}(r) = du(r)/dr - u(r)/r$ と表される．それぞれの円筒上では滑り無し条件を仮定する．また， $r = R_2$ におけるせん断応力の $r\theta$ 成分 $\tau(R_2)$ は $T/(2\pi R_2^2)$ となる．以下の問に答えよ．

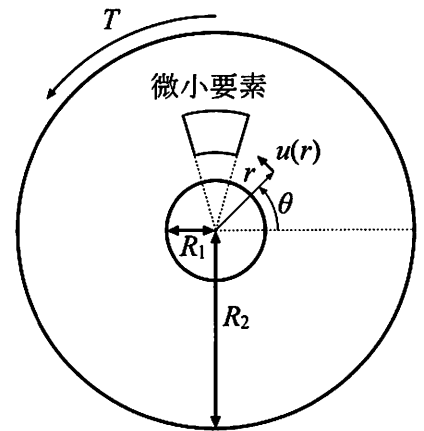


図 2-1

- (1) $r = R_1$ における $u(r)$ を示せ．
- (2) 図 2-1 中に示す，中心軸から距離 r にある微小要素を考える．この微小要素は，図 2-2 に示すように，半径方向に微小な長さ dr ，周方向に微小な角度 $d\theta$ ，軸方向に単位長さを持つ．この微小要素に加わるせん断応力による周方向の力は，外径側の面では $(r+dr) \cdot \tau(r+dr) \cdot d\theta$ ，内径側の面では $-r \cdot \tau(r) \cdot d\theta$ ，周方向の両側面ではそれぞれ $\tau(r) \cdot dr \cdot \sin(d\theta/2)$ であると仮定する．微小要素における力の釣り合いを考え，各微小量の 2 次以上の項は無視して， $d\tau(r)/dr + 2\tau(r)/r = 0$ が成り立つことを示せ．
- (3) $\tau(r)$ を r と T を用いて示せ．

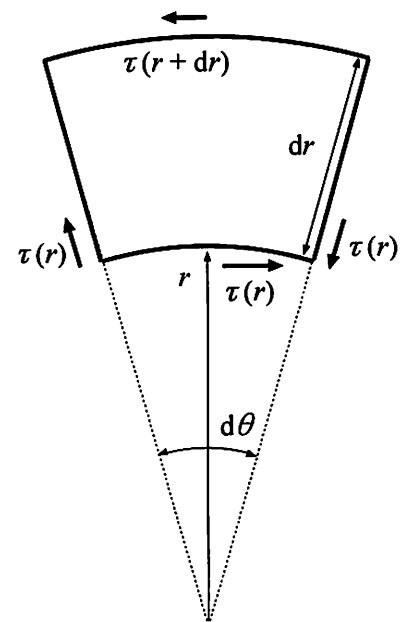


図 2-2

流体が粘性係数 μ のニュートン流体である場合を考える．ニュートン流体では $\tau(r)$ と $\dot{\gamma}(r)$ の間に $\tau(r) = \mu \dot{\gamma}(r)$ の関係がある．以下の問に答えよ．

- (4) $W(r) = u(r)/r$ において $W(r)$ を先に求めることにより， $u(r)$ を r ， R_1 ， T ， μ を用いて示せ．
- (5) 外円筒の角速度を R_1 ， R_2 ， T ， μ を用いて示せ．

次に，流体が降伏応力 τ_y のビンガム流体である場合を考える．ビンガム流体では $\dot{\gamma}(r)$ が， $\tau(r) < \tau_y$ の場合には $\dot{\gamma}(r) = 0$ ， $\tau(r) \geq \tau_y$ の場合には B を正の定数として $\dot{\gamma}(r) = (\tau(r) - \tau_y)/B$ で与えられる． $\tau(r) = \tau_y$ となる r を d_c とする．以下では，そのような d_c が $R_1 \leq d_c < R_2$ の範囲にある場合を考える．また， $u(r)$ は流体中で連続であるとする．以下の問に答えよ．

- (6) d_c を T と τ_y を用いて示せ．
- (7) $R_1 \leq r \leq d_c$ における $u(r)$ を B ， d_c ， r ， R_1 ， T を用いて示せ．
- (8) $d_c < r \leq R_2$ における $u(r)$ を B ， d_c ， r ， R_1 ， T を用いて示せ．
- (9) 外円筒の角速度を B ， d_c ， R_1 ， T を用いて示せ．
- (10) d_c が $R_1 \leq d_c < R_2$ を満たす場合の T が取りうる値の範囲を R_1 ， R_2 ， τ_y を用いて示せ．また，その範囲における外円筒の角速度の最小値を示し，さらに角速度が最小となる場合の T の値を R_1 と τ_y を用いて示せ．

問題 3

図 3-1 に示すような、質量 m 、半径 a の厚さを無視できる均質な円板が、一様な重力の下で、水平な床面上を滑らず転がる運動を考える。ここでは、空間に固定した直交座標系として、床面上に X, Y 軸を、鉛直上向きに Z 軸をとり、円板と床面との接点 A の座標を $(p, q, 0)$ とする。また、円板の重心 G を通り円板面と床面に平行な軸を x 軸、円板の重心を通り円板面に平行で x 軸と直交する軸を y 軸、円板の重心を通り x 軸と y 軸に直交する軸を z 軸とする。さらに、円板の重心を通り Z 軸と平行な軸を Z' 軸、円板と床面との接点を通り X 軸と平行な軸を X' 軸、円板と床面との接点を通り x 軸と平行な軸を x' 軸とする。このとき円板の運動は、 X' 軸と x' 軸のなす角 ϕ 、 Z' 軸と z 軸のなす角 θ 、円板の z 軸まわりの回転角 ψ 、及びこれらの時間高階微分の変数によって表現される。上記の軸や角の正方向は図 3-1 の通りとする。鉛直下向きの重力加速度の大きさを g とし以下の間に答えよ。なお、記号 $(\dot{})$ 、 $(\ddot{})$ は時間 t に関する 1 階及び 2 階微分を表すものとする。

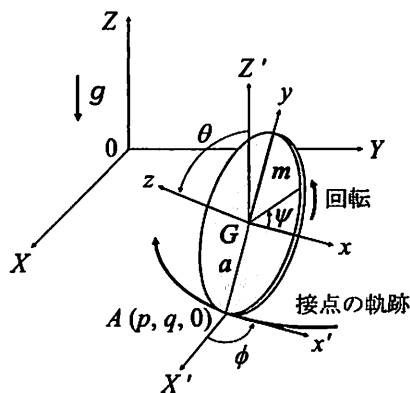


図 3-1

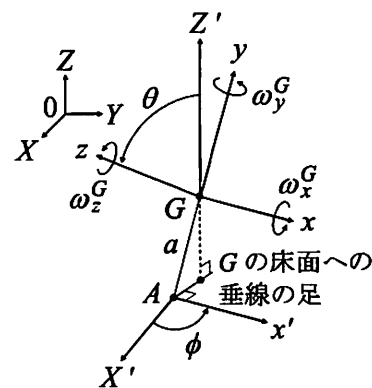


図 3-2

- (1) 円板の慣性主軸 x, y, z 軸まわりの慣性モーメント, I_x, I_y, I_z を, m, a を用いてそれぞれ表せ。
- (2) 円板の重心 G まわりの角速度の x, y, z 成分, $\omega_x^G, \omega_y^G, \omega_z^G$ は, 式①, ②, ③のように表現できる。空欄 (a), (b) に入る数式を, $\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ の中から必要なものを用いてそれぞれ示せ。重心 G まわりの角速度の各成分について、必要に応じて図 3-2 を参考にせよ。

$$\omega_x^G = \dot{\theta} \quad \cdots \text{①}, \quad \omega_y^G = \boxed{\text{(a)}} \quad \cdots \text{②}, \quad \omega_z^G = \boxed{\text{(b)}} + \dot{\psi} \quad \cdots \text{③}$$

- (3) 円板の重心 G の位置の X, Y, Z 成分, P_X^G, P_Y^G, P_Z^G を, p, q, θ, ϕ 及び a の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。重心 G と接点 A の幾何関係について、必要に応じて図 3-2 を参考にせよ。
- (4) 円板の重心 G の速度の X, Y, Z 成分, V_X^G, V_Y^G, V_Z^G を, $p, q, \theta, \phi, \dot{p}, \dot{q}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ 及び a の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。
- (5) 円板の運動エネルギーを K 、床面を基準とした円板の重力による位置エネルギーを U 、ラグランジアンを $L = K - U$ とするとき、ラグランジアン L が式④で与えられることを示せ。

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) + m a (\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi - \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi) \dot{p} \\ - m a (\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi) \dot{q} + \frac{1}{8} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{4} m a^2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - m g a \sin \theta \quad \cdots \text{④}$$

(次ページに続く)

問題3の続き

- (6) 円板と床面との接点は滑りを生じない。接点 A の速度の X, Y 成分, $V_X^A (= \dot{p})$, $V_Y^A (= \dot{q})$ を, θ, ϕ, ψ , $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ 及び a の中から必要なものを用いてそれぞれ表せ。

以下, p, q, θ, ϕ, ψ を一般化座標, 問 (6) の関係を一般化座標と一般化速度に関する拘束条件として, 円板の運動を考える。

- (7) p に関するラグランジュの運動方程式は, 式⑤のように表現できる。 λ_p はラグランジュ乗数であり, 力の単位を持つ。空欄 (c) に入る数式を示せ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{d}{dt} \{ \boxed{\text{(c)}} \} = \lambda_p \quad \cdots \text{⑤}$$

- (8) q に関するラグランジュの運動方程式は, 式⑥のように表現できる。 λ_q はラグランジュ乗数であり, 力の単位を持つ。空欄 (d) に入る数式を示せ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \{ \boxed{\text{(d)}} \} = \lambda_q \quad \cdots \text{⑥}$$

- (9) ψ に関するラグランジュの運動方程式は, 式⑦のように表現できる。 λ_p, λ_q は 式⑤, ⑥のラグランジュ乗数である。空欄 (e), (f), (g) に入る数式を示せ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \{ \boxed{\text{(e)}} \} = \lambda_p \boxed{\text{(f)}} + \lambda_q \boxed{\text{(g)}} \quad \cdots \text{⑦}$$

同様にして導出される p, q, θ, ϕ, ψ に関する5つのラグランジュの運動方程式より上記の拘束条件を用いて $\dot{p}, \dot{q}, \lambda_p, \lambda_q$ を消去して整理すると, 円板の姿勢 θ, ϕ, ψ に関する以下の運動方程式 (式⑧) を得る。

$$\begin{bmatrix} (5/4)ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)ma^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & (3/2)ma^2 \cos \theta & (3/2)ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (5/4)ma^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + (3/2)ma^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \\ (-1/2)ma^2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \\ (-5/2)ma^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m g a \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \text{⑧}$$

ここでは, その1つの解

$$\theta = \theta_0 \quad \cdots \text{⑨}$$

$$\phi = C_\phi t + \phi_0 \quad \cdots \text{⑩}$$

$$\psi = C_\psi t + \psi_0 \quad \cdots \text{⑪}$$

について考える。 $C_\phi, C_\psi, \theta_0, \phi_0, \psi_0$ はある定数であり, $0 < \theta_0 < \pi/2$ とする。

- (10) 円板と床面との接点 A が描く軌跡を C_ϕ, C_ψ, ϕ_0 と関連付けて図示せよ。接点 A の初期位置を $(p, q, 0) = (0, 0, 0)$ とせよ。

- (11) 円板と床面との接点 A に働く面内拘束力の X, Y 成分, F_X^A, F_Y^A を $m, a, C_\phi, C_\psi, \theta_0, \phi_0, \psi_0$ 及び t の中から必要なものを用いて表せ。